

# ỨNG DỤNG TOẠ ĐỘ CONG ĐỂ GIẢI BÀI TOÁN HAI CHIỀU VỀ CHUYỂN TẢI BÙN CÁT VÀ DIỄN BIẾN ĐÁY TRONG ĐOẠN SÔNG CONG

Nguyễn Kỳ Phùng - Trung tâm khí tượng thủy văn phía Nam

Nguyễn Thị Bầy - Bộ môn Cơ lưu chất, Trường ĐHKHT TP. Hồ Chí Minh

## Tóm tắt

Trong bài báo này, các tác giả dùng mô hình dòng chảy hai chiều dựa trên hệ phương trình chuyển động và liên tục, kết hợp với mô hình chuyển tải bùn cát và phương trình liên tục các hạt vật chất đáy để tính toán dòng bùn cát và diễn biến đáy. Mô hình dòng chảy được áp dụng để tính cho một đoạn kênh cong  $180^\circ$ , kết quả được so sánh với kết quả thí nghiệm. Mô hình kết hợp với phương trình chuyển tải bùn cát được áp dụng để tính dòng bùn cát và diễn biến đáy cho đoạn cong sông Lũy.

## Lời mở đầu

Cơ cấu dòng chảy và dòng bùn cát trong đoạn sông cong phức tạp hơn nhiều so với dòng chảy ở những đoạn thẳng. Một mặt, các hạt vật chất trong đoạn kênh cong không những chỉ chuyển động dọc theo sông theo dòng chảy chính mà còn chuyển động theo dòng thứ cấp xảy ra ở đoạn uốn cong. Mặt khác, sự không ổn định của dòng chảy trên đoạn cong ảnh hưởng đến cơ cấu của trường vận tốc dòng chảy, và chính nguyên nhân này gây ra sự chuyển động và phân bố lại của các hạt vật chất. Dòng chuyển tải bùn cát được nghiên cứu bởi nhiều tác giả Shukry (1950), Rozovskii (1957), Yen (1965). Tuy nhiên, vấn đề này vẫn còn nhiều điều chưa rõ và còn đang được nghiên cứu. Tất cả các phương trình được giải trong toạ độ cong phù hợp với khu vực tính toán.

## 1. Cơ sở lý thuyết của mô hình

### a. Sơ lược về hệ toạ độ cong

Sự hiện hữu của vùng bờ có địa hình phức tạp là một trong những nguyên nhân gây khó khăn khi giải các bài toán dòng chảy, nhất là ở vùng biên, và phương pháp giải rộng rãi là chia vùng bờ thành những đoạn nhỏ song song với trục toạ độ Descartes  $(x, y)$ . Điểm yếu của phương pháp này là lời giải sai nhiều ở vùng ven bờ. Để tăng độ chính xác khi tính các bài toán biên trong một khu vực bất kỳ, ta có thể chuyển sang toạ độ cong  $(\xi, \eta)$ , biến vùng vật lý thực tế sang một vùng đơn giản hơn, và các phép tính được thực hiện trên vùng này. Áp dụng phương pháp tính này hầu như rất hiệu quả khi giải các bài toán trong các vùng có địa hình phức tạp (Thompson, Warsi, and Mastin, 1985, Voltzinger, Klevanny, and Plinovski, 1989).

Ở đây lưới được xây dựng dựa trên cơ sở lời giải hệ phương trình Poisson:

$$\Delta^2 \xi = P(\xi, \eta), \quad \Delta^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (1)$$

$P, Q$ - hàm số điều khiển lưới (Thompson, 1982).

Lời giải có dạng sau:

$$L(r) = g_{22}r_{\xi\xi} - 2g_{12}r_{\xi\eta} - g_{11}r_{\eta\eta} = -J^2(Pr_{\xi} + Qr_{\eta}) \quad (2)$$

J- Ma trận Jacobi

$$\begin{aligned} J &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta}; & 0 \neq J < \infty \\ r &= xi + yj; & g_{22} = x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 = |r_{\eta}|^2; \\ g_{12} &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} = r_{\xi}r_{\eta}; & g_{11} = x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 = |r_{\xi}|^2 \end{aligned} \quad (3)$$

Các phương trình trong toạ độ vuông góc

- Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}[(h + \zeta)u] + \frac{\partial}{\partial y}[(h + \zeta)v] = 0 \quad (4)$$

- Phương trình chuyển động:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial x} + k \frac{u(\sqrt{u^2 + v^2})}{h + \zeta} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial \zeta}{\partial y} + k \frac{v(\sqrt{u^2 + v^2})}{h + \zeta} = 0 \quad (6)$$

$\zeta$  - mực nước,  $h$  - chiều sâu,  $g$  - gia tốc trọng trường,  
 $u, v$  - hai thành phần vận tốc trong toạ độ vuông góc,  $k$  - hệ số ma sát đáy,  
 $x, y \in \Omega$ ,  $\Omega$  - vùng thực tế nghiên cứu với các đường  $\partial\Omega$ .

Trên biên cứng của đường  $\partial\Omega_1$  ta có điều kiện về vận tốc:  $v_n|_{\partial\Omega_1} = 0$

Trên biên lỏng của đường  $\partial\Omega_2$  - giá trị  $\zeta$

Với  $v_n$  là vận tốc dòng chảy vuông góc với  $\partial\Omega_1$ .

- Phương trình chuyển tải bùn cát

Bùn cát được giả định trong lòng sông chia thành hai lớp: lớp bùn đáy nằm ở độ sâu  $(-h < z < -h+a)$  và lớp lơ lửng phía trên nằm ở độ sâu  $(-h+a < z < \zeta)$ , với  $a$  là bề dày lớp bùn cát đáy ( $a=0,01H$ ) [5].

Phương trình chuyển tải bùn cát, sau khi tích phân theo chiều sâu có dạng sau:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_v \left( u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{E}{H} + K_r \nabla^2 C \quad (7)$$

trong đó  $C$  - nồng độ bùn cát trung bình theo chiều sâu,

$K_r$  - hệ số truyền tải rối ngang,

$E$  - hàm số nguồn, mô tả sự bốc lên hay lắng xuống của hạt:

$$E = \omega_s (C_{ac} - C_a) \quad (8)$$

$\omega_s$  - tốc độ lắng của hạt,

$C_{ac}$  - nồng độ bão hòa tại độ sâu  $-h+a$  tính thực nghiệm theo Van Rijn [5],

$C_a$  - nồng độ thực tại độ sâu  $-h+a$ :  $C_a = \gamma_c C$ ,

$\gamma_c, \gamma_v$  - lần lượt là hệ số phân bố vận tốc và nồng độ theo chiều sâu, tính theo hàm thực nghiệm đa thức theo các thông số lơ lửng [4].

- Phương trình liên tục các vật chất đáy

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon} [E + K_r H V^2 C + \nabla q_b] \quad (9)$$

$\varepsilon$  - độ rỗng của hạt;  $q_b$  - dòng bùn cát đáy, tính thực nghiệm theo Van Rijn.

### b. Các phương trình trong tọa độ cong

- Hệ phương trình liên tục và chuyển động:

$$\begin{cases} p_\tau + gHJ^{-1}(g_{22}\zeta_\xi - g_{12}\zeta_\eta) = \Psi_1 \\ q_\tau + gHJ^{-1}(g_{11}\zeta_\eta - g_{12}\zeta_\xi) = \Psi_2 \\ JH_\tau + p_\xi + q_\eta = 0 \end{cases} \quad (10)$$

$$p = JUH; \quad q = JVH; \quad H = h + \zeta$$

U, V - thành phần phản biến (Contravariant) trong tọa độ cong của vận tốc

$$U = J^{-1}(uy_\eta - vx_\eta), \quad V = J^{-1}(-vy_\xi - vx_\xi) \quad (11)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{a1} + \Psi_{t1}; \quad \Psi_2 = \Psi_{a2} + \Psi_{t2} \quad (12)$$

$\Psi_{a1}, \Psi_{a2}$  - thành phần bình lưu (advection) trong tọa độ cong,

$\Psi_{t1}, \Psi_{t2}$  - thành phần ma sát trong tọa độ cong.

$$\Psi_{a1} = -[(pU)_\xi + (pV)_\eta + JH(U^2\Gamma_{11}^1 + 2UV\Gamma_{12}^1 + V^2\Gamma_{22}^1)]; \quad (12a)$$

$$\Psi_{a2} = -[(qU)_\xi + (qV)_\eta + JH(U^2\Gamma_{11}^2 + 2UV\Gamma_{12}^2 + V^2\Gamma_{22}^2)]; \quad (12b)$$

$$\Psi_{t1} = -\frac{K}{H}|v|p; \quad \Psi_{t2} = -\frac{K}{H}|v|q; \quad (12c)$$

$$\Gamma_{i,j}^k \text{ Cristoffel symbols- II, } \Gamma_{i,j}^k = \frac{\partial e_i}{\partial \xi^j} e^k \quad (13)$$

$e^1, e^2$  - vectơ cơ sở trong tọa độ cong  $\xi, \eta$ .

$e^1, e^2$  - Contravariant của vectơ e.

Điều kiện biên trên  $\partial\Omega_1$ :  $p=0$  tại  $\xi = \text{const}$ ;  $q=0$  tại  $\eta = \text{const}$

Điều kiện biên trên  $\partial\Omega_2$ : giá trị  $\zeta$ .

- Phương trình chuyển tải bùn cát trong tọa độ cong:

$$\begin{aligned} C_t + J^{-1}H^{-1}\gamma_v(pC_\xi + qC_\eta) = \\ = EH^{-1} + K_r J^{-1}[(\gamma_0 C_\xi - \beta_0 C_\eta)_\xi + (\alpha_0 C_\eta - \beta_0 C_\xi)_\eta] \end{aligned} \quad (14)$$

$$\gamma_0 = J^{-1}g_{22}; \quad \beta_0 = J^{-1}g_{12}; \quad \alpha_0 = J^{-1}g_{11}$$

Điều kiện biên trên  $\partial\Omega_1$ :

$$C_{\xi} = \frac{g_{12}}{g_{22}} C_{\eta} \quad \text{tại } \xi = \text{const} \quad \text{hay} \quad C_{\eta} = \frac{g_{12}}{g_{11}} C_{\xi} \quad \text{tại } \eta = \text{const}$$

Điều kiện biên trên  $\partial\Omega_2$ :  $C=C_p$

- Phương trình liên tục vật chất đáy trong tọa độ cong  $\xi, \eta$ .

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{1-\varepsilon} \left[ E + K_T HV^2 C + J^{-1} \left[ (Q_b^1)_{\xi} + (Q_b^2)_{\eta} \right] \right] \quad (15)$$

$Q_b^1, Q_b^2$  - hai thành phần của dòng bùn cát đáy trong tọa độ cong  $\xi, \eta$ .

### c. Sơ đồ số của mô hình

Hệ phương trình (10,14,15) được tích phân bằng phương pháp sai phân luân hướng, sơ đồ C- Arakav trên lưới chữ nhật  $\Omega^*$ , là ảnh của lưới tính toán (hình 3). Phương pháp được hiện thực hoá nhờ giải thuật truy đuổi cho một biến trên mỗi nửa bước thời gian, hai biến còn lại giải theo sơ đồ hiện. Trình tự tính toán được trình bày kỹ trong [2]. Sơ đồ trên rất ổn định nếu thành phần phi tuyến có thể bỏ qua. Trong trường hợp ngược lại, độ ổn định của sơ đồ bị giới hạn như sau:

$$p \leq CH\sqrt{g_{22}}; q \leq CH\sqrt{g_{11}}; \quad \text{hay} \quad \Delta t < \min \frac{JH}{\Omega^* p + q} \quad (16)$$

$$(C = \sqrt{gH});$$

Sơ đồ đòi hỏi phải làm nhẵn để nén những dao động cao sau mỗi bước thời gian bằng cách đưa vào vế phải của phương trình hệ số nhót nhân tạo:

$$q = q^* + v\delta_{\xi_i}^2 q^*; \quad v > 0 \quad (17)$$

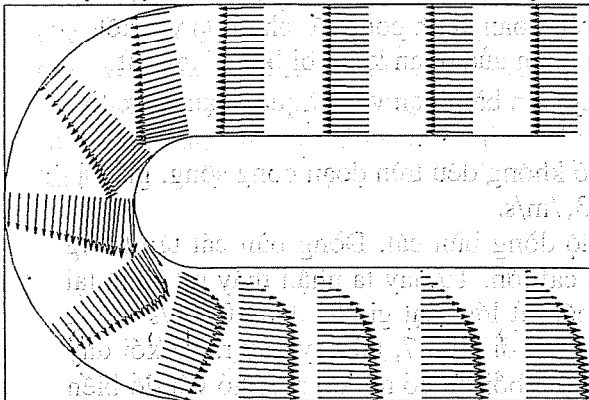
trong đó:  $q^*$  - giá trị sau mỗi bước thời gian;  $v$  - hệ số nhót nhân tạo.

$\delta_{\xi_i}^2$  - sai phân gần đúng của toán tử Laplace.

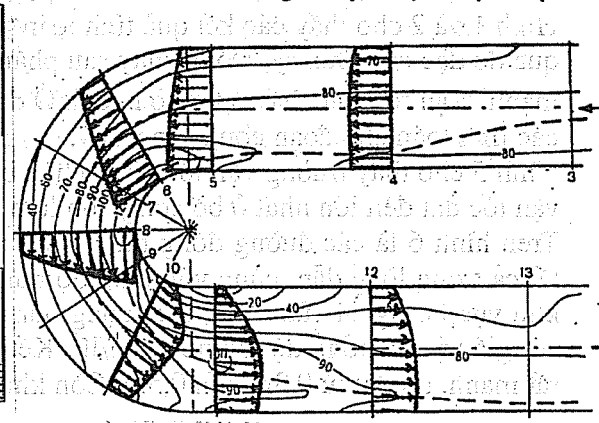
## 2. Áp dụng mô hình

Mô hình dòng chảy được áp dụng tính cho đoạn kênh cong đáy phẳng rộng 10m, dài 90m, có góc quay  $180^\circ$  với bán kính  $r=15m$ . Bước không gian từ 0,5 m đến 1,5m. Kết quả được vẽ trên hình 1 cho 13 mặt cắt của kênh, sau đó so sánh với kết quả thí nghiệm của Shukry ở hình 2.

Mô hình kết hợp dòng chảy với chuyển tải bùn cát và diễn biến đáy được áp dụng để tính toán cho sông Lũy (hình 4) với lưới cong trên hình 3. Độ dài đoạn dòng chảy gần 1500m. Bước lưới không gian từ 10m tới 30m. Mực nước đầu vào 10,82 m (với độ rộng khoảng 220m); đầu ra-9,28m (rộng 500m). Bước thời gian ( $t=0,36s$ ). Trình tự được tính toán theo thứ tự sau đây. Thoạt đầu mô hình dòng chảy được thực hiện

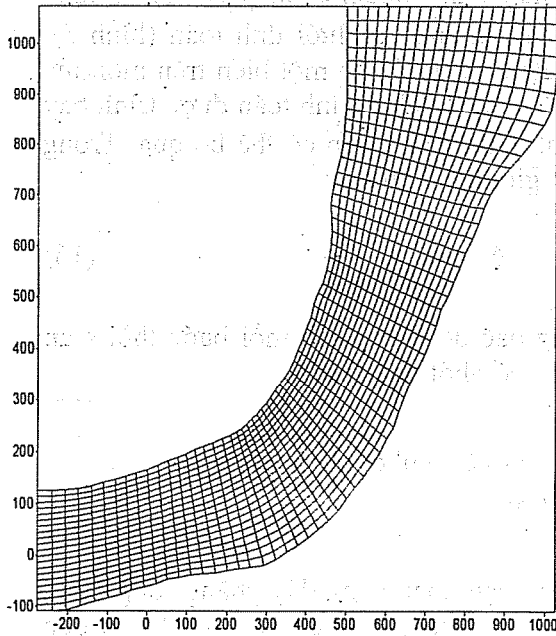


H. 1 Phân bố vận tốc trên đoạn kênh cong

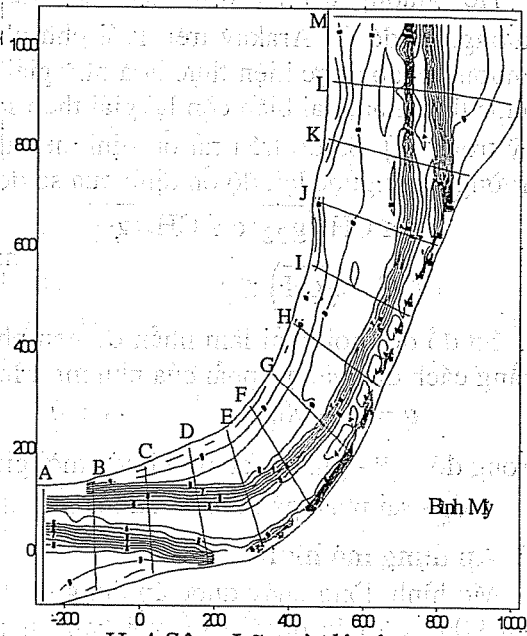


H. 2 Kết quả đo đạc của Shukry

cho khu vực tính toán với trường vận tốc ban đầu bằng không cho đến khi toàn bộ khu vực dao động ổn định (tính sau 10 giờ). Sau đó mô hình chuyển tải được kết hợp vào để tính nồng độ và dòng bùn cát cùng sau mỗi nửa bước thời gian, và diễn biến đáy sau một bước thời gian. Mô hình kết hợp được tính trong thời gian 5 ngày. Do tính phức tạp của bài toán, và do sự biến thiên độ sâu không lớn lắm sau mỗi bước thời gian, nên trong thời gian 1 giờ tính toán trên mô hình, độ sâu lòng dẫn (dùng cho tính toán của mô hình dòng chảy) xem như không đổi. Độ sâu lòng dẫn sẽ được hiệu chỉnh lại sau mỗi giờ cho cả hai mô hình.



H. 3 Lưới sông Lũy



H. 4 Sông Lũy và độ sâu

Sau đó nồng độ được vẽ lên bằng các đường đồng mức (hình 6), vận tốc dòng chảy biểu diễn dưới dạng vectơ (hình 5). Còn hình 7 trình bày các kết quả về biến đổi đáy (các đường đồng mức dh), trong đó khu vực màu tối ( $dh > 0$ ) là khu vực bị xói; còn khu vực màu sáng ( $dh < 0$ ) là khu vực bồi.

### 3. Kết quả

Hình 1 và 2 cho thấy các kết quả tính toán trên đoạn kênh cong rất phù hợp với kết quả đo đạc của Shukry. Dòng chảy sau phần cong của đoạn kênh bị biến dạng rất mạnh. Vận tốc lớn nhất đạt ở bờ ngoài. Ở đây, xin bàn luận về kết quả nhận được từ các tính toán cho đoạn cong sông Lũy.

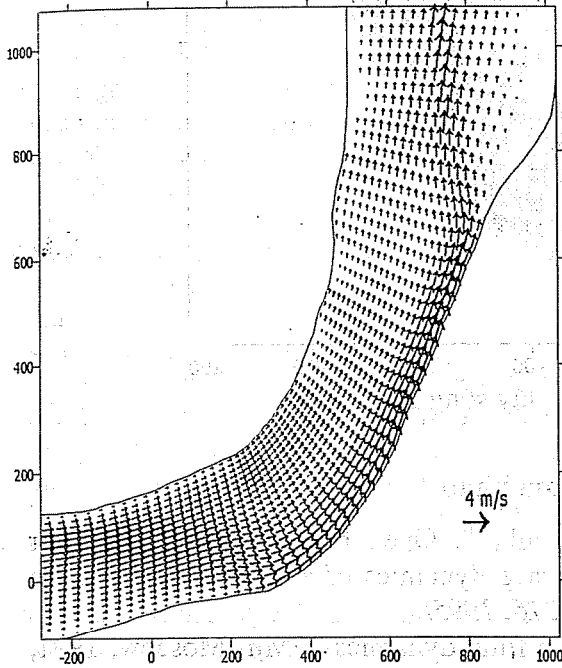
Hình 5 cho thấy trường vận tốc cũng phân bố không đều trên đoạn cong sông, giá trị vận tốc đạt đến lớn nhất ở bờ cong, lớn hơn 3,7m/s.

Trên hình 6 là các đường đồng mức nồng độ dòng bùn cát. Dòng bùn cát tập trung tất cả trong lòng dẫn, cùng với nồng độ bùn cát lớn. Từ đây ta nhận thấy rất rõ là tại khu vực bờ ngoài của sông, lưu lượng bùn cát rất lớn, đạt giá trị đến 10g/m<sup>3</sup> cùng với giá trị của nồng độ lớn hơn 20g/lít. Kết hợp với hình 7, tại đây xảy ra sự xói đáy rất mạnh, dh đạt từ 0,3m đến 0,5m. Còn khu vực bồi thì có tốc độ rất nhỏ với độ biến

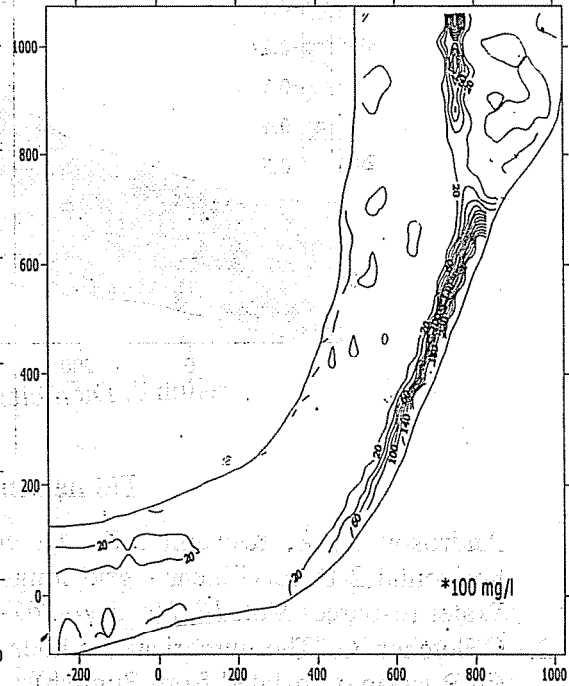
thiên đáy dh từ 0 đến 0,05m , nhưng trên phạm vi rất rộng về phía bờ lồi bên trong. Tất cả các hình ảnh nhận được từ tính toán rất phù hợp với thực tế.

#### 4. Kết luận

Cần nói thêm là các kết quả tính toán về dòng chảy trên đoạn sông Lũy được hiệu chỉnh (bằng hệ số ma sát đáy) và đã so sánh với kết quả đo đạc được tại khu vực xói mạnh với vận tốc  $V_{\max}=3,7$  m/s. (trong trường hợp này, lưu lượng dòng chảy  $Q=1180$   $m^3/s$ ). Còn các kết quả tính toán bùn cát nhận được trên cơ sở giả định nồng độ bùn cát tại biên lỏng,

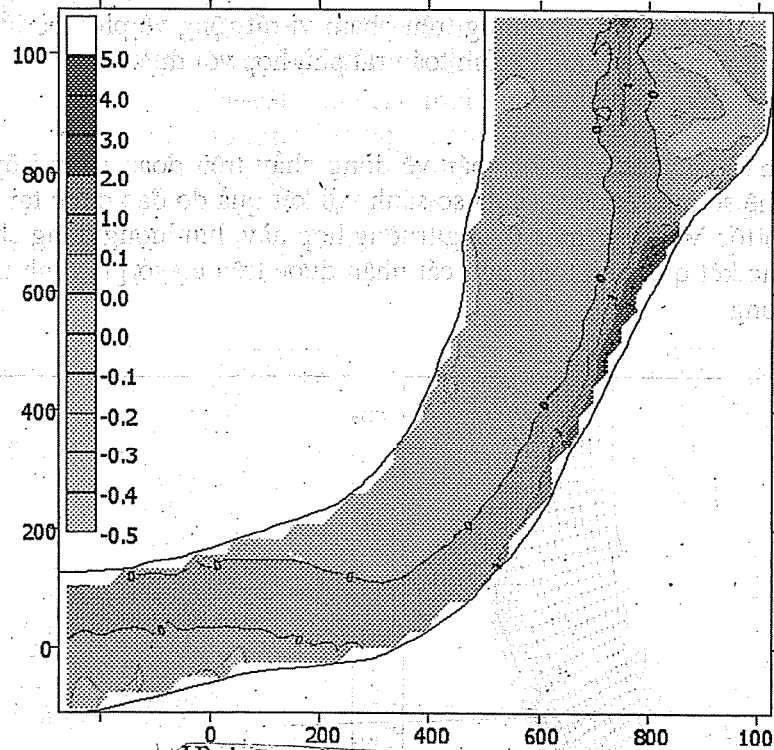


H. 5: Trường vận tốc trên đoạn cong sông Lũy.



H. 6. đường đồng mức nồng độ

và không có số liệu thực đo để so sánh. Điều này không ảnh hưởng nhiều đến sai số của kết quả bên trong lưới giải, vì dòng bùn cát trên sông chủ yếu là dòng bùn cát đáy, và mạnh nhất là ở khu vực trọng điểm uốn cong. Hình ảnh nhận được chỉ đánh giá một cách định tính, nhưng phản ánh tốt hình ảnh xói lở thực tế. Điều này nói lên tính đúng đắn của mô hình, và có thể áp dụng mô hình cho những khu vực tương tự khác.



Hình 7. Diễn biến đáy sông Luy

#### Tài liệu tham khảo

1. Androsov A, A, Klevanny. K. A., et all ". Open boundary conditions for horizontal 2-D curvilinear - grid long-wave dynamics of a strait / *Advances in Water resources Vol. 18, No. 5, p- 267-276, 1995*/.
2. OFletcher K. "The numerical methods in fluid dynamics " /Mir, Moscow, 1991, (in Russian, translated from English).
3. Klevanny K.A., Matveyev G. V.,...." An integrated modelling system for coastal area dynamics /*international journal for. numerical method in fluids, Vol.19, p 181-206,1994*/.
4. Klevanny K.A., Vonzinger N. E.,.... "Hydrodynamics of the long wave for coastal zone /*Hydrometeoizdat, Leningrad, 1989. 271 p. in Russian*/).
5. Van Rijn L. C. " Sediment transport ". Pt.1 Bed load transport /*J. Hydraul. Eng. -1984. Vol.110, N.10. P. 1431-1456*/.