XÂY DỰNG CHƯƠNG TRÌNH MÔ PHỎNG DÒNG CHẢY MẶT THOÁNG HAI CHIỀU TỔNG QUÁT PHẦN I. MÔ HÌNH SỐ

ThS. **Nguyễn Tất Thắng**
Viện Cơ học

Bài báo trình bày phương pháp số tính toán, mô phỏng dòng chảy hai chiều mặt thoáng trong điều kiện tổng quát trên cơ sở giải số hệ phương trình Saint-Venant hai chiều đầy đủ có tính đến các tính chất gián đoạn của dòng chảy và các điều kiện địa hình phức tạp sử dụng lưới tính toán không cấu trúc. Phương pháp số là phương pháp Godunov với xấp xỉ hàm dòng kiểu Roe, thành phần nguồn theo hướng. Bài báo trình bày Phần I của nghiên cứu: Mô hình số. Phần II của nghiên cứu về các tính toán kiểm nghiệm mô hình số bằng cách so sánh các kết quả tính toán với các kết quả thí nghiệm vật lý hoặc các kết quả tính toán của các chương trình thương mại khác sẽ được trình bày trong một bài báo tiếp theo.

1. Giới thiệu

Gần đây phương pháp Godunov với xấp xỉ hàm dòng kiểu Roe giải hệ phương trình nước nông dạng tổng quát một chiều và hai chiều, có xét đến số hạng nguồn, đã đạt được nhiều kết quả. Những ưu điểm của phương pháp này bao gồm: a) Tính bảo toàn tốt do lời giải được xây dựng trên dạng tích phân của hệ phương trình cơ sở; b) Khả năng xử lý tốt các gián đoạn trong dòng chảy bằng việc giải nghiệm trên cơ sở các sóng lan truyền các đặc trưng; c) Lưới tính toán không cấu trúc có tính mềm dẻo cao, cho phép mô tả tốt các miền hình học phức tạp, bảo toàn được hình dạng của các đối tượng (công trình) cần quan tâm đặc biệt trong miền tính và bảo toàn được hình dạng của các biên. Trong trường hợp một chiều, Garcia-Navarro P. và Vazquez-Cendon M.E. [1] đã trình bày những nghiên cứu của họ cho các dạng phương trình một chiều khác nhau, hàm dòng có thể không chỉ phụ thuộc vào các biến bảo toàn mà còn phụ thuộc dạng hiện vào các biến không gian. Các tác giả này cũng đã trình bày những nghiên cứu mới của mình về việc xử lý số hạng nguồn theo điểm hoặc theo kiểu sai phân ngược dòng (upwind). Các nghiên cứu về xử lý kiểu sai phân ngược dòng cho số hạng nguồn đã đặt nền tảng cho những tổng quát hóa sau này cho trường hợp hai chiều. Để thuận tiện, sơ đồ số kiểu sai phân ngược dòng cho số hạng nguồn này trong nghiên cứu ở đây sẽ được gọi là sơ đồ (hay phương pháp) G-V. Hạnh N.V. [2] đã tổng hợp, so sánh phương pháp G-V với các phương pháp sai phân khác cho các dạng bài toán một chiều khác nhau, đặc biệt là bài toán mà nghiệm có gián đoạn. Đối với các bài toán hai chiều, Alcrudo F. và Garcia-Navarro P. [3] đã áp dụng sơ đồ số kiểu G-V giải các bài toán hai chiều trong điều kiện chảy xiết hoặc lời giải có gián đoạn. Tuy nhiên họ chỉ xét các hệ phương trình một chiều và hai chiều dạng thuần nhất. Brufau P. và Garcia-Navarro P. [4] đã trình bày những kết quả nghiên cứu của họ áp dụng sơ đồ số kiểu G-V giải các bài toán vỡ đê, đập hai chiều với xử lý kiểu nguồn điểm và có xét đến ma sát của thành cứng. Hubbard M.E. và Garcia-Navarro P. [5] đã trình bày những đề xuất về phân tách sai phân dòng và xử lý kiểu sai phân ngược dòng số hạng nguồn đảm bảo tính cân bằng tốt cho mô hình trong đó có sử dụng phương pháp Godunov và xấp xỉ hàm dòng kiểu Roe. Trên cơ sở này, Brufau P. và các cộng sự [6] đã xây dựng một mô hình số mô phỏng dòng chảy trong các miền hình học phức tạp có tính đến các chế độ khô, ướt và gián đoạn trong dòng chảy. Các nghiên cứu trên cho thấy khả năng ứng dụng tốt của các sơ đồ số kiểu Godunov và xấp

xỉ hàm dòng kiểu Roe vào tính toán mô phỏng dòng chảy mặt thoáng tổng quát trong đó tính gián đoạn của dòng chảy (bài toán tính toán mô phỏng lan truyền lũ do vỡ đê, đập) và tính chất phức tạp của miền tính (các miền hình học hai chiều phức tạp, có các công trình, có các miền khô-ướt thay đổi theo thời gian) đều có mặt. Bài báo này trình bày cơ sở lý thuyết của chương trình tính toán, mô phỏng dòng chảy hai chiều tổng quát áp dụng sơ đồ số kiểu Godunov với kỹ thuật phân tách sai phân hàm dòng kiểu Roe và xử lý số hạng nguồn theo kiểu sai phân ngược dòng.

Bài báo gồm bốn phần. Phần 1 trình bày giới thiệu chung. Phần 2 trình bày phương pháp số, xuất phát từ phương pháp số cho bài toán một chiều dạng tổng quát sau đó tổng quát hóa cho phương trình hai chiều. Phần 3 trình bày các cải tiến về tính toán ma sát trên thành cứng và cách xử lý vi phạm Entropy của Harten và Hyman [7]. Phần 4 gồm kết luận và các tài liệu tham khảo.

2. Phương pháp số

a. Phương pháp Godunov với xấp xỉ hàm dòng kiểu Roe cho bài toán một chiều tổng quát

Phương pháp Godunov với xấp xỉ hàm dòng kiểu Roe cho bài toán một chiều tổng quát có xét đến số hạng nguồn được áp dụng theo nghiên cứu của Hubbard M.E. và Garcia-Navarro P. [5]. Các phương trình một chiều biểu diễn hệ các định luật bảo toàn có thể được viết như sau:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F}{\partial x}=S \qquad (1)$$

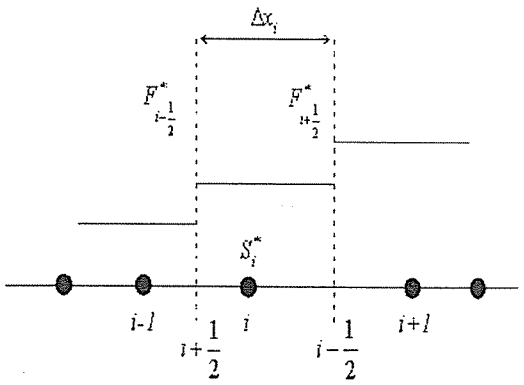
Với U là vectơ của các biến bảo toàn, F là vectơ dòng đối lưu, và S là số hạng nguồn. Ở đây ta xem xét các bài toán với dòng có dạng F=F(U).

Áp dụng phương pháp khối thể tích hữu hạn (Finite Volume Method - FVM) cho một đoạn (khối điều khiển một chiều) bất kỳ, kết hợp với việc dùng công thức Gauss và công thức sai phân Euler tiến cho đạo hàm theo thời gian, dạng sai phân của phương trình (1) được viết như sau:

$$U_i^{n+1}=U_i^n-\frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left(F^*_{i+1/2}-F^*_{i-1/2}\right)+\frac{\Delta t}{\Delta x_i}S_i^* \qquad (2)$$

Trong đó F* biểu diễn số hạng dòng được ước lượng tại giao diện giữa các đoạn và $S_i^*=\int_{\Delta x_i} S dx$ là tích phân số hạng nguồn trên đoạn Δx_i

Để thuận tiện, ta sử dụng sơ đồ mà các biến bảo toàn được chọn tại tâm của ô và các ô tính toán trùng với các ô lưới (Hình 1). Theo cách này phương trình sai phân (2) được viết dưới dạng tổng quát cho lưới bất kỳ, không nhất thiết là lưới đều, bước lưới $\Delta x_i=x_{i+1\,2}-x_{i-1\,2}$ chỉ liên quan đến đoạn Δx_i. Lưu ý rằng, khác với các phương pháp sai phân, giá trị của các biến thường được tính tại các nút lưới trong sơ đồ sai phân, trong phương pháp thể tích hữu hạn chỉ số i dùng để ký hiệu các phần tử (trong trường hợp một chiều là các đoạn, trong trường hợp hai chiều là các phần tử tam giác hoặc tứ giác...), giá trị các biến là đại diện cho giá trị của biến đó trên cả phần tử và được quy về tâm của phần tử đó. Ngoài ra khi giải quyết các bài toán cục bộ ở biên $i\pm\frac{1}{2}$ giữa các phần tử, chỉ số được sử dụng trong ký hiệu giá trị của các biến ở giao diện giữa các phần tử (điểm giữa các phần tử lưới tính một chiều, hay cạnh giữa các phần tử lưới tính hai chiều).



Hình 1. Các số hạng dòng và số hạng nguồn trong sơ đồ tính toán

Một kiểu sơ đồ sai phân ngược dòng, phát triển bởi Roe [8] tính toán hàm dòng tại giao diện giữa các ô, được áp dụng. Trong đó lời giải của bài toán Riemann xấp xỉ được dùng để khai triển các số hạng dòng theo các đặc trưng bằng cách chéo hóa phần đồng nhất của hệ (3) sau đây (một dạng tuyến tính của hệ (1)):

$$U_t+\tilde{A}U_x=0 \qquad (3)$$

với: $\tilde{A} \approx \partial F/\partial U$ Là ma trận Jacobian xấp xỉ của hệ. Các bài toán Riemann xuất hiện tại các giao diện (trong trường hợp một chiều là các nút giữa các đoạn, trong trường hợp hai chiều là các cạnh chung giữa các phần tử) nơi có thể có các gián đoạn do việc biểu diễn rời rạc (giả thiết Godunov) của nghiệm theo từng ô tính [7]. Với việc sử dụng lời giải bài toán Riemann xấp xỉ của Roe ta có thể viết sai phân dòng dưới dạng sau:

$$\Delta F_{i+1/2} = \left(\tilde{A}\Delta U\right)_{i+1/2} = \left(\tilde{R}\tilde{\Lambda}\tilde{R}^{-1}\Delta U\right)_{i+1/2} = \left(\sum_{k=1}^{N_w} \tilde{\alpha}_k \tilde{\lambda}_k \tilde{r}_k\right)_{i+1/2} \quad (4)$$

trong đó ΔF biểu diễn bước nhảy của dòng F qua giao diện giữa các ô tính. $\tilde{R}$ là ma trận có các cột là các vectơ riêng bên phải, $\tilde{r}_k$ của ma trận $\tilde{A}$. $\tilde{\Lambda}$ là ma trận đường chéo chứa các giá trị riêng $\tilde{\lambda}_k$ của A và các thành phần của $\tilde{R}^{-1}\Delta U\left(=\Delta W\right)$ là các bước sóng $\tilde{\alpha}_k$ gắn với mỗi thành phần của khai triển (ở đây W chính là vectơ của các biến đặc trưng của hệ). Biểu thức cuối cùng trong (4) chỉ ra cách mà sai phân hàm dòng được khai triển theo N_W thành phần đặc trưng (hay chính là theo các sóng của bài toán Riemann), N_W là số các phương trình của hệ (3). Trong bài báo này, ký hiệu ~ được dùng để chỉ ước lượng của một đại lượng nào đó tại trạng thái trung bình Roe [8].

Có dạng khai triển (4), chúng ta xây dựng sơ đồ Roe cho hệ thuần nhất của các phương trình từ (2) bằng cách xấp xỉ dòng như sau [7]:

$$F^*_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(F_{i+1} + F_i\right) - \frac{1}{2}\left(\tilde{R}\left|\tilde{\Lambda}\right|\tilde{R}^{-1}\Delta U\right)_{i+1/2} \quad (5)$$

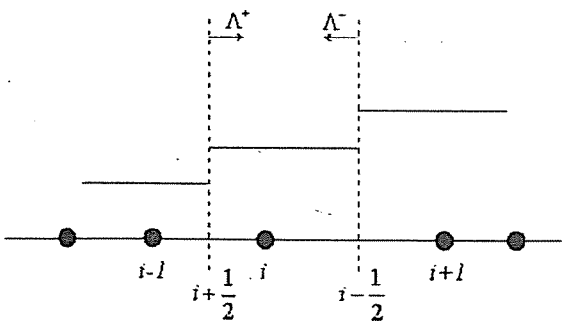
Với: $\left|\tilde{\Lambda}\right| = diag\left(\left|\tilde{\lambda}_k\right|\right)$ là ma trận có các thành phần trên đường chéo là $\left|\tilde{\lambda}_k\right|$; các biểu thức liên quan đến số hạng nguồn tạm thời được bỏ qua ở đây. Công thức tính $F^*_{i-1/2}$ là hoàn toàn tương tự.

Việc lựa chọn trạng thái trung bình Roe (ký hiệu bởi ~) thoả mãn (4) có nghĩa rằng lời giải bài toán Riemann xấp xỉ là lời giải chính xác cho bài toán đã được tuyến tính hoá cục bộ (tại các giao diện giữa các ô tính) của bài toán Riemann. Khi (4) được kết hợp với (5), sơ đồ (2) được viết theo dạng sau:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left[\left(\tilde{R}\tilde{\Lambda}^-\tilde{R}^{-1}\Delta U\right)_{i+1/2} + \left(\tilde{R}\tilde{\Lambda}^+\tilde{R}^{-1}\Delta U\right)_{i-1/2}\right] + \frac{\Delta t}{\Delta x_i}S_i^* \quad (6)$$

Trong đó: $\tilde{\Lambda}^{\pm} = \frac{1}{2}\left(\tilde{\Lambda} \pm \left|\tilde{\Lambda}\right|\right)$

Dạng (6) được hiểu như sau: thông tin, được dùng để cập nhật tính toán cho các biến trạng thái trong ô, được tách thành các phần liên hệ đến thông tin truyền vào ô từ bên phải (+) và thông tin truyền vào ô từ bên trái (-). Từ đó có thể thấy nghiệm trong ô được cập nhật hay tính toán bằng việc sử dụng chỉ các thông tin lan truyền theo các sóng (đi vào ô đang được xem xét) của các bài toán Riemann ở các nút (Hình 2). Sau đây chúng ta sẽ xem xét lựa chọn dạng thích hợp cho tích phân số hạng nguồn.



Hình 2. Các hướng lan truyền thông tin trong một đoạn

Trong nghiên cứu này ta áp dụng phương pháp rời rạc hóa số hạng nguồn sử dụng dạng khai triển theo đặc trưng (4). Cách làm ở đây là chiếu tích phân số hạng nguồn lên hệ các vectơ riêng của ma trận Jacobian , khi đó có thể biểu diễn tích phân số hạng nguồn theo dạng tuyến tính như sau:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} S dx \approx \widetilde{S}_{i+\frac{1}{2}} = \left(\widetilde{R}\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)_{i+\frac{1}{2}} = \left(\sum_{k=1}^{N_e} \widetilde{\beta}_k \widetilde{r}_k\right)_{i+\frac{1}{2}} \qquad (7)$$

ở đây $\widetilde{\beta}_k$, các hệ số của khai triển, là các thành phần của vectơ $\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}$. Chú ý rằng tích phân được xấp xỉ trong (7) được lấy trên hai ô kề nhau, gắn với giao diện *i+1/2* và có thể dễ dàng kết hợp với dạng sai phân (6). Biểu thức S_i^* của ô sẽ được xây dựng bằng cách gộp số hạng nguồn tính theo hai giao diện *i+1/2* và *i-1/2* của ô tính toán. Tính bảo toàn được đảm bảo miễn là toàn bộ tích phân (7) tại một giao diện *i+1/2* nào đó được phân bố hoàn toàn cho hai ô lân cận. Lưu ý rằng theo cách trên ta chỉ cần ước lượng các hệ số $\widetilde{\beta}_k$, các số hạng còn lại đều đã được ước lượng trong sai phân dòng.

Các số hạng ở vế phải của (7) sẽ được dùng để cân bằng với các thành phần của sai phân dòng trong ΔF trong (4) do đó chúng phải được tuyến tính hóa theo cùng một cách để đảm bảo rằng ở trạng thái cân bằng ta có:

$$F_x - S \equiv 0 \Rightarrow \Delta F_{i+1\,2} - \widetilde{S}_{i+1\,2} = 0 \qquad (8)$$

trên toàn miền tính. Điều này được thỏa mãn vì ở trạng thái cân bằng các khai triển (4) và (7) đã được xây dựng sao cho $\widetilde{\Lambda}\widetilde{R}^{-1}\Delta U = \widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}$ hoặc tương đương như vậy là: $\widetilde{\alpha}_k\widetilde{\lambda}_k = \widetilde{\beta}_k$

Lưu ý rằng ký hiệu ~, như đã nói ở trên, biểu diễn ước lượng của một đại lượng nào đó ở trạng thái trung bình Roe. Trong tính toán thực tế, điều quan trọng là dòng và nguồn phải được ước lượng ở cùng một trạng thái để đảm bảo tính cân bằng.

Kết quả của cách phân rã theo đặc trưng (7) là các số hạng nguồn cũng có thể được rời rạc hóa theo kiểu sai phân ngược dòng mặc dù không có một thành phần nào của phân rã đó là hệ quả của các tác động của các yếu tố khác theo hướng ngược dòng. Như vậy phương pháp rời rạc hóa số hạng nguồn ở đây là phỏng theo cách sai phân thành phần dòng tương ứng. Biểu thức sai phân kiểu ngược dòng (6) có xét đến số hạng nguồn được viết như sau:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x_i}\left[\left(\widetilde{R}\left(\widetilde{\Lambda}^-\widetilde{R}^{-1}\Delta U - I^-\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)\right)_{i+1\,2} + \left(\widetilde{R}\left(\widetilde{\Lambda}^+\widetilde{R}^{-1}\Delta U - I^+\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)\right)_{i-1\,2}\right]$$

với : $I^{\pm} = \widetilde{\Lambda}^{-1}\widetilde{\Lambda}^{\pm} = \widetilde{\Lambda}^{-1}\frac{1}{2}\left(\widetilde{\Lambda} \pm \left|\widetilde{\Lambda}\right|\right)$. Có thể thấy ngay rằng tại trạng thái cân bằng (8), tính cân bằng của (9) hoàn toàn được thỏa mãn.

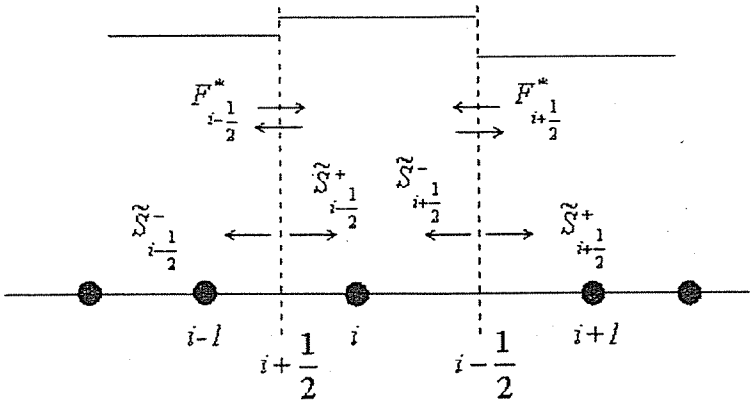
Tính tương thích giữa (9) và (2) có thể được chứng minh tương đối đơn giản bằng cách tách các số hạng , để ngắn gọn thì các diễn giải không được viết lại ở đây. Theo đó tích phân số hạng nguồn trong (2) đã được $\widetilde{\Lambda}^-, I^-, \widetilde{\Lambda}^+, I^+$ biểu diễn theo:

$$S_i^* = \widetilde{S}^-_{i+1\,2} + \widetilde{S}^+_{i-1\,2} \qquad (10)$$

Với $\widetilde{S}^-_{i+1/2} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{R}\left(I - \text{sgn}\ (I)\right)\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)_{i+1/2} = \left(\widetilde{R}\,I^-\,\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)_{i+1/2}$

Và $\widetilde{S}^+_{i-1/2} = \frac{1}{2}\left(\widetilde{R}\left(I + \text{sgn}\ (I)\right)\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)_{i-1/2} = \left(\widetilde{R}\,I^+\,\widetilde{R}^{-1}\widetilde{S}\right)_{i-1/2}$ trong đó sgn (I) là toán tử lấy dấu của I.

Cách rời rạc hóa số hạng nguồn này đảm bảo rằng mọi trạng thái cân bằng (trạng thái cột nước tĩnh) sẽ được thể hiện bởi mô hình số. Theo đó số hạng nguồn đã được phân rã và các công thức dạng hiện của nó đã được xây dựng để ước lượng giá trị của các biểu thức theo các biến dòng chảy. Phân bố của các thành phần nguồn và dòng được trình bày như trong Hình (3).



Hình 3. Phân bố thành phần nguồn và dòng trong một ô tính

b. Tổng quát hóa cho hệ phương trình nước nông hai chiều không dừng

Hệ phương trình nước nông hai chiều bỏ qua các chuyển động rối, không xét đến ứng xuất gió trên bề mặt, có thể được viết dưới dạng bảo toàn có số hạng nguồn như sau [4]:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \nabla \cdot (F, G) = H \qquad (11)$$

Trong đó: $U = \begin{bmatrix} h \\ hu \\ hv \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \\ huv \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} hv \\ huv \\ hv^2 + g\frac{h^2}{2} \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 0 \\ gh(S_{0_x} - S_{f_x}) \\ gh(S_{0_y} - S_{f_y}) \end{bmatrix}$

ở đây U là vectơ của các biến bảo toàn với h là độ sâu cột nước, hu và hv là các lưu lượng đơn vị theo các hướng tương ứng của các trục tọa độ x và y. F và G là dòng của các biến bảo toàn qua các cạnh của các ô tính. Trong trường hợp hệ phương trình đang xét ta có F=F(U) và G=G(U). H là số hạng nguồn. u và v lần lượt là các thành phần vận tốc được trung bình theo chiều sâu theo các phương x và y, g là gia tốc trọng trường. S_{0_x} và S_{0_y} à các thành phần liên quan đến độ dốc đáy theo các hướng x và y. S_{f_x} và S_{f_y} lần lượt là các số hạng liên quan đến ma sát theo các hướng x và y tương ứng. Phương trình Manning với một số hiệu chỉnh được sử dụng để tính toán thành phần ma sát của các phần tử biên có tính đến ảnh hưởng của thành cứng. Việc hiệu chỉnh chi tiết sẽ được trình bày trong phần sau.

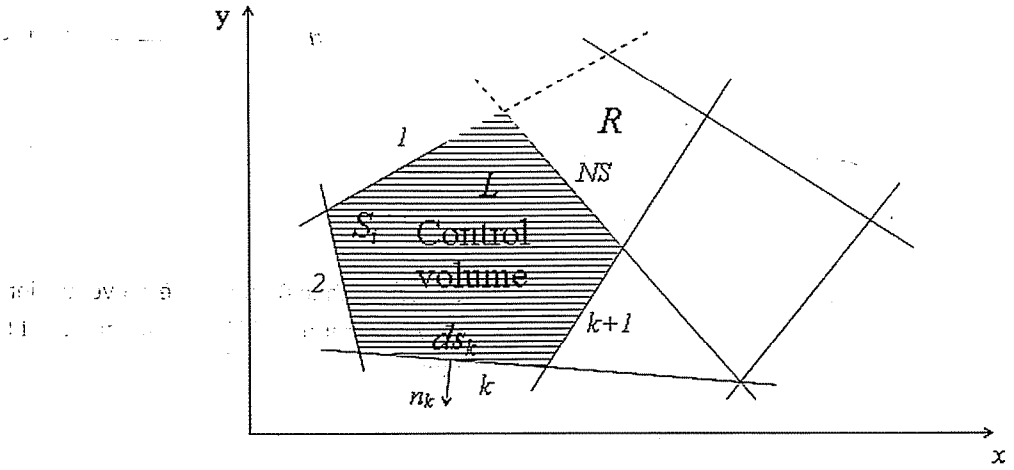
Phương pháp thể tích hữu hạn với các biến quy ước lấy tại tâm phần tử được áp dụng cho phương trình dạng bảo toàn (11) với khối điều khiển trong trường hợp hai chiều là một đa giác lồi với số cạnh tùy ý của lưới không cấu trúc (Hình 4). Theo Godunov [7], giá trị của các biến được giả thiết là hằng số trong mỗi ô. Tích phân của phương trình (11) trên diện tích S của khối điều khiển được viết như sau:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial t} dS + \int_S \nabla \cdot (F, G) dS = \int_S H dS \qquad (12)$$

Áp dụng công thức Gauss cho biểu thức tích phân mặt, (12) được viết lại như sau:

$$\int_S \frac{\partial U}{\partial t} dS + \oint_C (F, G) \cdot n dC = \int_S H dS \qquad (13)$$

với C là biên của diện tích S, n là vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài trên biên. Cho trước ô tính toán diện tích S_i, với i là chỉ số gắn với tâm ô (Hình 4), phương trình (13) được viết thành:



Hình 4. Khối điều khiển trong trường hợp hai chiều và các thành phần liên quan

$$\frac{dU_i}{dt}S_i + \oint_{C_i}(F,G)\cdot ndC = H_i S_i \qquad (14)$$

với giả thiết hệ lưới tính toán là cố định theo thời gian. Xấp xỉ tích phân đường trên các cạnh ta có:

$$\oint_{C_i}(F,G)\cdot ndC = \sum_{k=1}^{NS}(F,G)_k^* \cdot n_k ds_k \qquad (15)$$

với k là chỉ số cạnh thứ k của ô (Hình 4), *NS* là số cạnh của ô (*NS=3* trong trường hợp ô tam giác). Vectơ n_K là vectơ pháp tuyến đơn vị hướng ra ngoài, *dsk* là chiều dài cạnh k, $(F,G)_k^*$ là tenxơ dòng với giá trị của dòng *F* và *G* được ước lượng trên mỗi cạnh. Ước lượng của dòng *F* và *G* dựa trên cơ sở bài toán Riemann được định nghĩa bởi các giả thiết Godunov ở bên trái và bên phải của các cạnh của ô tính toán, tương tự như trường hợp một chiều đã trình bày. Một đặc trưng quan trọng của sơ đồ ngược dòng một chiều cho các hệ phi tuyến được sử dụng ở đây là: theo định nghĩa ma trận Jacobian xấp xỉ $\widetilde{A}_{RI.}$ [8] được xây dựng tại các cạnh của ô tính. Tương tự như trong trường hợp một chiều, với trường hợp hai chiều ta có:

$$(F,G)^*\cdot n = \frac{1}{2}\left[(F,G)_R\cdot n + (F,G)_L\cdot n - \left|\widetilde{A}_{RI.}\right|\Delta U_{RI.}\right] \qquad (16)$$

với *k=1,...,NS*. *R* và *L* dùng để ký hiệu cho các trạng thái bên phải và bên trái của cạnh *k*. $\widetilde{A}_{RI.}$ biểu diễn ma trận Jacobian xấp xỉ của dòng vuông góc đi qua cạnh. Để tiện trình bày, ký hiệu *k* được bỏ đi.

Theo Roe P.L. [8], ma trận $\widetilde{A}_{RI.}$ phải thỏa mãn những điều kiện sau đây:

(1) $\widetilde{A}_{RI.}$ chỉ phụ thuộc vào các trạng thái UL và UR

(2) $(F_R - F_L) = \widetilde{A}_{RI.}(U_R - U_L)$

(3) $\widetilde{A}_{RI.}$ có các giá trị riêng thực phân biệt và có tập hợp đầy đủ các vectơ riêng.

(4) $\widetilde{A}_{RI.} = A(U_R) = A(U_L)$ nếu: $U_R = U_L$

Với: $$A = \frac{\partial(F,G)}{\partial U}\cdot n = \frac{\partial F}{\partial U}n_x + \frac{\partial G}{\partial U}n_y \qquad (17)$$

Cũng theo Roe P.L. [8], ma trận $\widetilde{A}_{RI.}$ có cùng cỡ với ma trận A nhưng nó được ước lượng ở một trạng thái trung bình xác định bởi $\widetilde{\omega} = (\widetilde{u}, \widetilde{v})$ và $\widetilde{c}$, các giá trị này phải được tính toán theo các tính chất đã trình bày của ma trận S_{J_y}. Như vậy từ ma trận A và các tính chất của nó, ma trận $\widetilde{A}_{RI.}$ phải có dạng biểu diễn như sau:

$$\widetilde{A}_{RI.} = \begin{pmatrix} 0 & n_x & n_y \\ (\widetilde{c}^2 - \widetilde{u}^2)n_x - \widetilde{u}\widetilde{v}n_y & 2\widetilde{u}n_x + \widetilde{v}n_y & \widetilde{u}n_y \\ (\widetilde{c}^2 - \widetilde{v}^2)n_y - \widetilde{u}\widetilde{v}n_x & \widetilde{v}n_x & \widetilde{u}n_x + 2\widetilde{v}n_y \end{pmatrix} \qquad (18)$$

Các giá trị riêng và vectơ riêng bên phải của $\widetilde{A}_{RI.}$ xác định được như sau (đặt $n=(n_x, n_y)$):

$$\tilde{\lambda}^1 = \tilde{\omega}\cdot n + \tilde{c} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y + \tilde{c};\ \ \tilde{\lambda}^2 = \tilde{\omega}\cdot n = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y;\ \ \tilde{\lambda}^3 = \tilde{\omega}\cdot n - \tilde{c} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y - \tilde{c} \quad (19)$$

$$\tilde{r}^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix}, \tilde{r}^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix}, \tilde{r}^3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \quad (20)$$

Các vectơ riêng $\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$ là độc lập tuyến tính hay det ($\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$) khác 0, khi đó hệ ba vectơ riêng $\tilde{r}^1, \tilde{r}^2, \tilde{r}^3$, lập thành một cơ sở đầy đủ và sai phân hay bước nhảy của trạng thái U qua một cạnh bất kỳ của ô tính được khai triển theo hệ các vectơ riêng của $\tilde{A}_{RL}$ như sau:

$$\begin{aligned} \Delta U = U_R - U_L &= \begin{pmatrix} \Delta h \\ \Delta(hu) \\ \Delta(hv) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_R - h_L \\ (hu)_R - (hu)_L \\ (hv)_R - (hv)_L \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^{3} \tilde{\alpha}^k \tilde{r}^k = \tilde{\alpha}^1 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} + \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} + \tilde{c}n_y \end{pmatrix} + \tilde{\alpha}^2 \begin{pmatrix} 0 \\ -\tilde{c}n_y \\ \tilde{c}n_x \end{pmatrix} + \tilde{\alpha}^3 \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{u} - \tilde{c}n_x \\ \tilde{v} - \tilde{c}n_y \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (21)$$

Giải hệ phương trình đại số tuyến tính (21) ta thu được:

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}^{1,3} &= \frac{\Delta h}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}}\left[\Delta(hu)n_x + \Delta(hv)n_y - \tilde{\omega}\cdot n\Delta h\right] \\ \tilde{\alpha}^2 &= \frac{1}{\tilde{c}}\left\{\left[\Delta(hv) - \tilde{v}\Delta h\right]n_x - \left[\Delta(hu) - \tilde{u}\Delta h\right]n_y\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

Cuối cùng bằng cách sử dụng điều kiện số 2 trong các tính chất đã nêu của ma trận $\tilde{A}_{RL}$ ta thu được hệ phương trình xác định $\tilde{u}, \tilde{v}$ và $\tilde{c}$ thông qua các biến trạng thái ở bên phải và bên trái của cạnh. Giải hệ phương trình này ta thu nhận được trạng thái trung bình Roe như sau:

$$\tilde{u} = \frac{\sqrt{h_R}u_R + \sqrt{h_L}u_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}};\ \tilde{v} = \frac{\sqrt{h_R}v_R + \sqrt{h_L}v_L}{\sqrt{h_R} + \sqrt{h_L}};\ \tilde{c} = \sqrt{\frac{g}{2}\left(h_R + h_L\right)} \quad (23)$$

Như vậy ta đã có công thức dạng hiện cho việc tính toán tất cả các giá trị trung gian để tính toán hàm dòng qua cạnh bất kỳ của ô. Thay thế các biểu thức trên vào (15), khi đó phương trình (14) được viết lại như sau:

$$\frac{dU_i}{dt} = -\frac{1}{S_i}\sum_{k=1}^{NS}\left(F,G\right)_k^* \cdot n_k ds_k + H_i \quad (24)$$

Sử dụng công thức sai phân Euler tiến cho thành phần đạo hàm theo thời gian, phương trình trên được viết thành:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{k=1}^{NS}\left(F,G\right)_k^* \cdot n_k ds_k\right)_i^n + \Delta t H_i^n \quad (25)$$

Mặt khác theo Brufau P. và các cộng sự [6], một dạng tương tự (4) cho trường hợp hai chiều có thể được viết như sau:

$$\Delta\left((F,G)\cdot n\right)=\tilde{A}_{RI}\Delta U=\tilde{R}\tilde{\Lambda}\tilde{R}^{-1}\Delta U=\tilde{R}\left(\tilde{\Lambda}^{+}+\tilde{\Lambda}^{-}\right)\tilde{R}^{-1}\Delta U \tag{26}$$

với $\tilde{\Lambda}^{\pm}=1/2\left(\tilde{\Lambda}\pm\left|\tilde{\Lambda}\right|\right)$. Cách khai triển này biểu diễn việc tách gradient dòng thành các phần lan truyền theo hai hướng trái và phải của cạnh. Để cập nhật giá trị của các biến trong một ô tính, chỉ các lan truyền của dòng từ các giao diện hướng vào ô là có ảnh hưởng tới việc này và mới được dùng trong phương trình của ô. Tương tự bài toán một chiều, tích phân đường của dòng theo phương pháp tuyến của cạnh được viết thành tổng của các sóng như sau:

$$U_i^{n+1}=U_i^n-\frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{k=1}^{NS}\left(\tilde{R}\tilde{\Lambda}^{-}\tilde{R}^{-1}\Delta U\right)_k ds_k\right)_i^n+\Delta t H_i^n \tag{27}$$

Bây giờ ta xem xét việc xử lý sô hạng nguồn theo cách tương tự bài toán một chiều đã trình bày ở trên. Trước tiên chúng ta thấy rằng số hạng nguồn bao gồm hai phần khác nhau và tương ứng chúng sẽ được giải quyết theo hai cách khác nhau, đó là: thành phần nguồn chứa đạo hàm của cao trình đáy H^1 sẽ được ước lượng theo hướng và số hạng nguồn liên quan đến ma sát H^2 sẽ được ước lượng theo điểm, ta có $H=H^1+H^2$.

Kiểu sai phân ngược dòng cũng sẽ được sử dụng để mô tả thành phần nguồn phụ thuộc vào đạo hàm cao trình đáy H^1. Cách làm này sẽ đảm bảo cân bằng tốt nhất giữa số hạng nguồn và dòng, đặc biệt là trong trường hợp nước tĩnh hay dòng chảy dừng [1]. Đối với mỗi cạnh k của ô Si, tương tự trường hợp một chiều số hạng nguồn sẽ được phân tách thành các phần trái và phải như sau:

$$\tilde{H}_k^1=\tilde{H}_k^{1+}+\tilde{H}_k^{1-} \tag{28}$$

ở đây ký hiệu ~ để chỉ ra rằng số hạng nguồn cũng được ước lượng tại cùng một trạng thái Roe giống như thành phần dòng. Điều này rất quan trọng bởi nó đảm bảo rằng cách phân tách sẽ duy trì cân bằng (nếu có) giữa số hạng nguồn và dòng. Như vậy:

$$\tilde{H}_k^{\pm}=\tilde{R}I^{\pm}\tilde{R}^{-1}\tilde{H}_k^1=\sum_{k=1}^{3}\tilde{\beta}^{k\pm}\tilde{r}^k \tag{29}$$

với: $I^{\pm}=\frac{1}{2}\left(I\pm\left|\tilde{\Lambda}\right|\tilde{\Lambda}^{-1}\right)$ và $\tilde{H}_k^1$ được ước lượng như sau: $\tilde{H}_k^1=\begin{pmatrix}0\\ g\tilde{h}\Delta z_x\\ g\tilde{h}\Delta z_y\end{pmatrix}$, trong đó:

$$\tilde{h}=\frac{1}{2}\left(h_R+h_L\right),\ \Delta z_x=-\left(z_R-z_L\right)n_x,\ \Delta z_y=-\left(z_R-z_L\right)n_y \tag{30}$$

Đối với mọi ô tính S_i (tương tự như trường hợp một chiều) ta cần cập nhật các thành phần đi vào theo phương pháp tuyến trên các cạnh của số hạng nguồn:

$$H_i^n=\sum_{k=1}^{NS}\tilde{H}_k^{1-} \tag{31}$$

Các hệ số $\tilde{\beta}^{-}$ xác định được như sau:

$$\tilde{\beta}^{1-}=\frac{1}{2\tilde{c}}\left(1-\frac{\left|\tilde{\lambda}^1\right|}{\tilde{\lambda}^1}\right)\left(\tilde{H}_2^1n_x+\tilde{H}_3^1n_y\right),\ \tilde{\beta}^{2-}=\frac{1}{\tilde{c}}\left(1-\frac{\left|\tilde{\lambda}^2\right|}{\tilde{\lambda}^2}\right)\left(-\tilde{H}_2^1n_y+\tilde{H}_3^1n_x\right),\ \tilde{\beta}^{3-}=\frac{-1}{2\tilde{c}}\left(1-\frac{\left|\tilde{\lambda}^3\right|}{\tilde{\lambda}^3}\right)\left(\tilde{H}_2^1n_x+\tilde{H}_3^1n_y\right) \tag{32}$$

Các giá trị trung bình, phương trình (30), như đã được đề xuất trong nghiên cứu của Bermúdez A. và các cộng sự [9], đảm bảo tính bảo toàn khi phân tách số hạng nguồn theo kiểu sai phân ngược dòng. Số hạng nguồn cho thành phần ma sát H2 không chứa các thành phần đạo hàm và được ước lượng theo điểm:

$$\tilde{H}_i^2 = \left(\tilde{H}_i^2\right)^n \tag{33}$$

Tóm lại biểu thức cuối cùng cho sơ đồ sai phân được viết như sau:

$$U_i^{n+1} = U_i^n - \frac{\Delta t}{S_i}\left(\sum_{k=1}^{NS}\left(\tilde{R}\left(\tilde{\Lambda}^- \tilde{R}^{-1}\Delta U - \delta I^- \tilde{R}^{-1}\tilde{H}^{1-}\right)\right)_k ds_k\right)_i^n + \Delta t\left(\tilde{H}_i^2\right)^n \tag{34}$$

Đây là sơ đồ hiện với bước thời gian được lựa chọn theo điều kiện CFL áp dụng cho phương pháp phần tử khối hữu hạn.

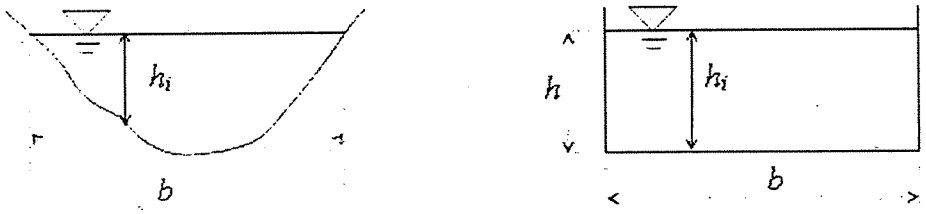
3. Xử lý ma sát tại biên cứng và vi phạm entropy

a. Xử lý thành phần ma sát tại biên (thành) cứng

Molls T. và các cộng sự [10] đã chỉ ra rằng việc không tính đến ma sát ở biên cứng có thể rất dễ dẫn đến những sai khác đáng kể khi tính toán mực nước. Thông thường người ta sử dụng công thức Manning hoặc Chézy để tính toán hệ số ma sát trong trường hợp dòng chảy đều, một chiều. Tuy nhiên các công thức đó cần được mở rộng và áp dụng một cách đúng đắn khi tính toán dòng chảy hai chiều. Công thức Manning được sử dụng trong các mô hình dòng chảy nước nông một chiều có thể được viết như sau:

$$S_f = \frac{n^2 u|u|}{R^{4/3}} \tag{35}$$

Khi áp dụng cho dòng chảy hai chiều, phương trình Manning được sửa đổi để xét cả ảnh hưởng của ma sát trên thành đứng. Cơ sở của việc sửa đổi là bảo đảm toàn bộ diện tích ướt sẽ được sử dụng trong tính toán.



Hình 5. Các mặt cắt kênh bất kỳ và mặt cắt kênh hình chữ nhật

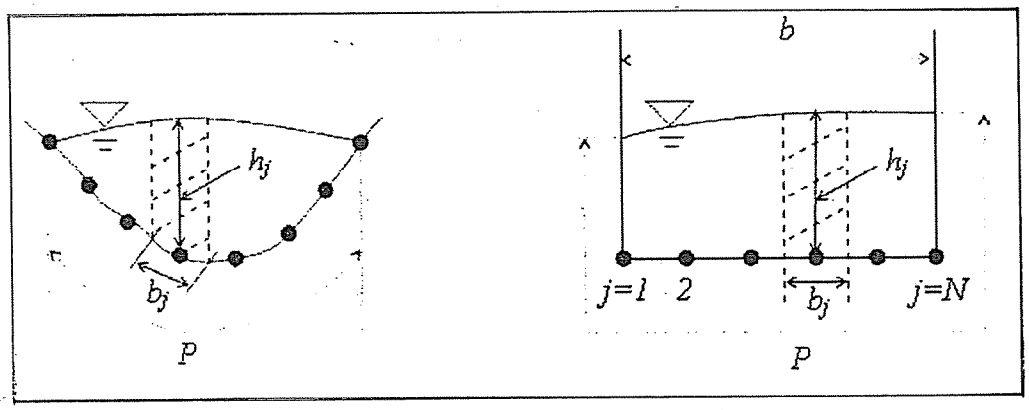
Đối với mặt cắt hình dạng bất kỳ chu vi ướt trong ô bằng chiều rộng đáy bj (Hình 6), thông thường người ta lấy $R_j=A_j/P_j=h_j$ (độ sâu cột nước trong ô. Hình 6). Trong trường hợp này số hạng nhám do ma sát được viết như sau:

$$S_{f_x} = \frac{n^2 u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}},\ S_{f_y} = \frac{n^2 v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} \tag{36}$$

Khi những công thức này được áp dụng cho kênh hình chữ nhật với điều kiện biên không dính thì nghĩa là ta chỉ xét đến ma sát của đáy mà bỏ qua ma sát trên thành cứng. Molls T. và các cộng sự [10] đã khắc phục sự không tương thích này bằng cách phân bổ ma sát trên thành cứng cho chiều rộng kênh trong trường hợp lưới có cấu trúc. Mỗi ô tính sẽ được gia số thêm vào chu vi ướt của nó một phần độ sâu của các thành kênh thuộc mặt cắt trong trường hợp lưới có cấu trúc. Với một ô thứ j chu vi ướt của nó được ước

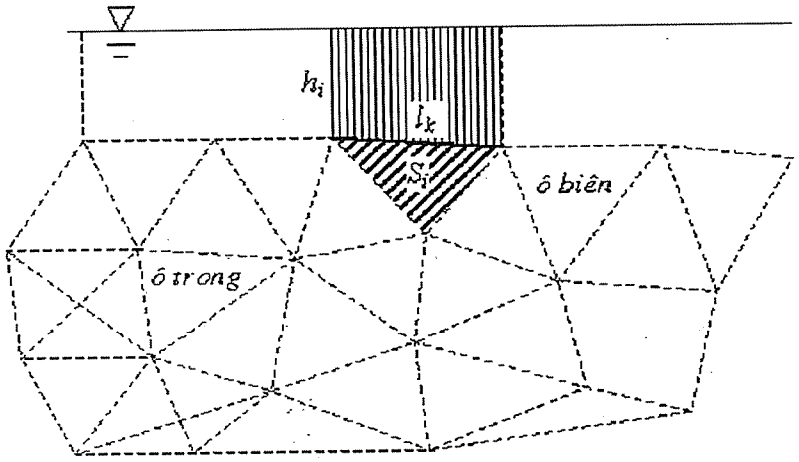
lượng như sau:

$P_j = b_j + \frac{h_1 + h_N}{N-1}$; Với N là tổng số nút tính toán trên mặt cắt kênh, h1 và hN là độ sâu cột nước tương ứng tại hai thành kênh.



Hình 6. Chu vi ướt tính theo các dạng mặt cắt khác nhau

Với lưới không cấu trúc, việc phân chia như trên gặp khó khăn. Thay vì phân phối đều ma sát tại thành cứng cho chiều rộng đáy kênh, ảnh hưởng của ma sát ở thành cứng sẽ được gộp vào hệ số ma sát tổng thể của ô có chứa cạnh biên cứng. Như vậy diện tích ướt thực của ô đó sẽ bằng diện tích đáy của nó cộng với diện tích ướt ở thành cứng (Hình 7).



Hình 7. Diện tích ướt của một ô tính với lưới không cấu trúc với giả thiết thành đứng

Chúng ta phân biệt hai loại ô khác nhau (Hình 7): ô trong (tất cả các cạnh của nó đều kề với các ô khác) và ô biên (ô có ít nhất một cạnh là biên cứng). Đối với các ô trong, hệ số ma sát được tính theo công thức Manning thông thường, với nb là hệ số nhám đáy ta sẽ có:

$$S_{f_x} = \frac{n_b^2 u\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}},\ S_{f_y} = \frac{n_b^2 v\sqrt{u^2+v^2}}{h^{4/3}} \quad (37)$$

Với các ô biên, công thức Manning được hiệu chỉnh như sau:

$$S_{f_x} = u\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{n_b^{3/2}}{h_i} + \sum_{k=1}^{NW}\frac{n_{wall}^{3/2} l_k}{S_i}\right)^{4/3},\ S_{f_y} = v\sqrt{u^2+v^2}\left(\frac{n_b^{3/2}}{h_i} + \sum_{k=1}^{NW}\frac{n_{wall}^{3/2} l_k}{S_i}\right)^{4/3} \quad (38)$$

Trong chương trình tính, thành phần ma sát do ảnh hưởng của thành cứng ở các ô biên được tính toàn bộ một lần trước khi bắt đầu quá trình tính toán.

b. Xử lý vi phạm Entropy của Harten và Hyman

Theo Toro E.F. [7], nghiệm của bài toán Riemann được tuyến tính hóa chỉ chứa đựng các bước nhảy gián đoạn. Nghiệm đó có thể là một xấp xỉ tốt cho các gián đoạn hay các mặt gián đoạn tiếp xúc, trong đó đặc trưng gián đoạn của sóng là chuẩn tắc. Trong khi đó các sóng giãn thực chất lại là những biến đổi liên tục của các biến dòng chảy, khi thời gian tăng, chúng phát triển rộng ra và do đó đạo hàm theo không gian có xu hướng triệt tiêu. Khi ấy xấp xỉ tuyến tính thông qua các bước nhảy gián đoạn sẽ không còn phù hợp. Trong thực tế tính toán, khi một trong số các giá trị riêng gần bằng 0 thì các xấp xỉ tuyến tính sẽ gặp sai số lớn, kết quả là các gián đoạn là không đúng thực tế vật lý hay còn được gọi là vi phạm điều kiện Entropy. Sau đây là cách sử lý vi phạm Entropy của Harten và Hyman [7]:

- Trường hợp sóng giãn bên trái: nếu $\lambda_1^{L'} < 0 < \lambda_1^{R}$ khi đi qua sóng này từ trái sang phải sẽ có tồn tại điểm mà $\lambda_1 \approx 0$ và phải xử lý vi phạm entropy ở đó. Tốc độ lan truyền của sóng giãn được hiệu chỉnh như sau:

$$\overline{\lambda}_1 = \lambda_1^{L'} \frac{\left(\lambda_1^{R} - \tilde{\lambda}_1\right)}{\left(\lambda_1^{R} - \lambda_1^{L'}\right)}$$

- Trường hợp sóng giãn bên phải, tốc độ lan truyền của sóng giãn sẽ được sửa đổi như sau:

$$\overline{\lambda}_3 = \lambda_3^{R} \frac{\left(\tilde{\lambda}_3 - \lambda_3^{L'}\right)}{\left(\lambda_3^{R} - \lambda_3^{L'}\right)}$$

4. Kết luận

Tóm lại báo cáo đã trình bày cơ sở lý thuyết của một sơ đồ số kiểu Godunov giải hệ phương trình nước nông hai chiều trong điều kiện tổng quát. Trong đó kỹ thuật phân tách sai phân dòng dựa trên cơ sở lời giải bài toán Riemann xấp xỉ của Roe được áp dụng. Việc tính toán cập nhật giá trị của các biến trạng thái trong mỗi ô tính dựa trên việc tổng hợp các thông tin đi vào ô qua các cạnh. Số hạng nguồn liên quan đến đạo hàm cao trình đáy được phân rã theo cùng dạng sai phân ngược dòng với số hạng dòng. Cách sai phân này đảm bảo tốt các tính chất cân bằng trong mô hình. Sơ đồ số đã trình bày có triển vọng áp dụng vào tính toán, mô phỏng các bài toán dòng chảy thực tế. Một trong số đó là tính toán dòng chảy lũ trong đó có thể tồn tại đồng thời yếu tố gián đoạn cũng như tính phức tạp của miền tính. Ưu điểm nổi bật khi áp dụng sơ đồ số này là khả năng xử lý tốt các gián đoạn khi có sự cố vỡ đê, đập (vỡ đột ngột) và khả năng mô tả chi tiết các dạng địa hình và miền hình học phức tạp. Tuy nhiên sơ đồ cũng có một hạn chế rất cần cải tiến và khắc phục do sơ đồ là hiện hoàn toàn, bước thời gian tính toán nhỏ và do đó thời gian tính toán lớn. Một số kết quả tính toán so sánh, kiểm nghiệm mô hình số với cơ sở lý thuyết này sẽ được trình bày trong bài báo tiếp theo.

Tài liệu tham khảo

1. *Garcia-Navarro P. và Vazquez-Cendon M.E. (2000): On numerical treatment of the source terms in the shallow water equations, Computer & Fluids, Vol.29, trang 951-979.*
2. *Hạnh N.V. (2003). Về một số phương pháp giải số hệ phương trình Saint-Venant một chiều trong chế độ dòng chảy tổng quát-Thử nghiệm cho hệ thống sông Hồng-Thái Bình, Luận án tiến sĩ cơ học, Viện Cơ học, Hà Nội.*
3. *Alcrudo F. và Garcia-Navarro P. (1993): A high-resolution Godunov-type scheme in finite volumes for*

the 2D shallow-water equations, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.16, tr 489-505.

4. *Brufau P. và Garcia-Navarro P. (2000): Two-dimensional dam break flow simulation, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.33, trang 35-57.*
5. *Hubbard M.E. và Garcia-Navarro P. (2000): Flux Difference Splitting and the Balancing of Source Terms and Flux Gradients, Journal of Computational Physics, Vol.165, trang 89-125.*
6. *Brufau P., Vázquez-Cendón M.E. và P. García-Navarro (2002): A numerical model for the flooding and drying of irregular domains, International Journal for Numerical Methods in Fluids, Vol.39, tr 247-275.*
7. *Toro E.F. (1999): Riemann Solvers and Numercial Methods for Fluids Dynamics: A Practical Introduction (2nd Edition), Springer Verlag, Berlin.*
8. *Roe P.L. (1981): Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes, Journal of Computational Physics, Vol.43, trang 357-372.*
9. *Bermúdez A., Dervieux A., Desideri J.A. và Vázquez M.E. (1998): Upwind schemes for the two-dimensional shallow water equations with variable depth using unstructured meshes, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol.155, trang 49-72*
10. *Molls T., Zhao G. và Molls F. (1998): Friction Slope in Depth-Averaged Flow, Journal of Hydraulic Engineering, Vol.124, No.1, trang 81-85*