

*Bài báo khoa học*

## **Xây dựng mô hình thủy động lực và vận chuyển bùn cát lơ lửng trên hệ tọa độ cong – Kiểm nghiệm mô hình với nghiệm của lời giải lý thuyết**

**Trần Thị Kim<sup>1,2,4</sup>, Nguyễn Khắc Thành Long<sup>3,4</sup>, Nguyễn Văn Phước<sup>5</sup>, Nguyễn Kỳ Phùng<sup>6</sup>, Nguyễn Thị Bầy<sup>3,4\*</sup>**

<sup>1</sup> Trường Đại học Tài nguyên và Môi trường Tp.HCM; [tkim@hcmunre.edu.vn](mailto:tkim@hcmunre.edu.vn)

<sup>2</sup> Viện Môi trường và Tài nguyên, Đại học Quốc Gia Tp.HCM

<sup>3</sup> Trường Đại học Bách Khoa; [ntbay@hcmut.edu.vn](mailto:ntbay@hcmut.edu.vn); [nkttl1107@gmail.com](mailto:nkttl1107@gmail.com)

<sup>4</sup> Đại học Quốc Gia Tp.HCM; [ntbay@hcmut.edu.vn](mailto:ntbay@hcmut.edu.vn); [nkttl1107@gmail.com](mailto:nkttl1107@gmail.com)

<sup>5</sup> Liên hiệp các Hội Khoa học và Kỹ thuật Thành phố Hồ Chí Minh;  
[nvphuoc196@gmail.com](mailto:nvphuoc196@gmail.com)

<sup>6</sup> Viện Khoa học và Công nghệ tính toán; [kyphungng@gmail.com](mailto:kyphungng@gmail.com)

\*Tác giả liên hệ: [ntbay@hcmut.edu.vn](mailto:ntbay@hcmut.edu.vn); Tel.: +84-902698585

Ban Biên tập nhận bài: 12/4/2021; Ngày phản biện xong: 1/6/2021; Ngày đăng bài: 25/8/2021

**Tóm tắt:** Bài báo này trình bày về việc xây dựng mô hình toán thủy động lực và vận chuyển bùn cát lơ lửng dựa vào lời giải trên hệ tọa độ cong của hệ phương trình Reynolds, kết hợp với hệ phương trình chuyển tải bùn cát, lấy trung bình theo chiều sâu, có tính đến hàm số nguồn, mô tả tốc độ bốc lên hay lắng xuống của hạt. Độ tin cậy của hai mô hình này được kiểm định bằng kết quả của nghiệm giải tích. Kết quả cho thấy vào các chu kỳ đầu, dao động mực nước không ổn định, từ chu kỳ thứ năm trở đi, dao động mực nước và vận tốc giữa nghiệm giải tích và từ mô hình cho kết quả khá trùng khớp. Khi tính toán thủy lực trên kênh chữ U, kết quả tính toán trường vận tốc khi sử dụng mô hình thủy động lực trên tọa độ cong cho thấy ưu điểm hơn so với khi sử dụng mô hình thủy động lực trên hệ tọa độ đề các. Mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng được kiểm tra với kết quả từ nghiệm giải tích ứng với nhiều trường hợp khác nhau. Kết quả cho thấy không có sự sai biệt lớn giữa các giá trị nồng độ lan truyền trong không gian theo thời gian tính toán từ mô hình và nghiệm giải tích, cho thấy bước đầu độ tin cậy của mô hình vừa được thiết lập là chấp nhận được.

**Từ khóa:** Thủy động lực; Vận chuyển bùn cát lơ lửng; Hệ tọa độ cong.

### **1. Mở đầu**

Bùn cát trong sông gồm các hạt khoáng chất, cát, sỏi, cuội, đá dăm, đá tảng... chuyển động trong dòng nước hay lắng đọng trong lòng sông. Chúng được hình thành một phần do quá trình phong hóa, bào mòn và xâm thực trên bề mặt lưu vực và sau đó bị gió và nước cuốn trôi vào lòng sông; một phần do quá trình xói lở chính bản thân trong lòng sông như sụt lở bờ, xói mòn đáy [1].

Với sự phát triển nhanh chóng của các phương pháp, mô hình tính toán đã trở thành một công cụ hữu ích để nghiên cứu chế độ thủy động lực học của dòng chảy và quá trình

vận chuyển bùn cát trong sông, hồ và các vùng ven biển [2]. Rất nhiều mô hình thương mại với giá thành cao đã ra đời với những ứng dụng linh hoạt đã được nhiều nhà khoa học sử dụng để mô phỏng vận chuyển bùn cát, điển hình như bộ mô hình MIKE21 và MIKE3 của DHI, được phát triển bởi Viện Thủy Lực Đan Mạch. Mô hình được xây dựng tích hợp rất nhiều công cụ mạnh, có thể giải quyết các bài toán cơ bản trong lĩnh vực tài nguyên nước [3]. Ngoài ra, có rất nhiều mô hình được thiết lập bởi các nhà khoa học như: Mô hình TELEMAC được bắt đầu phát triển từ năm 1987 do Tập đoàn Điện lực Pháp (EDF) chủ trì [4]; Mô hình SHORECIRC được phát triển năm 1999 [5]; Mô hình thủy lực CCHE2D do Jin và Wang phát triển năm 1999 [6]; Mô hình SUTRENCH-2D: Mô hình thủy động lực và vận chuyển bùn cát do Van Rijn và Tan phát triển năm 1985 và được hoàn thiện tính toán bùn cát kết dính vùng cửa sông đến năm 2007 [7]; Mô hình TABS-2: được phát triển năm 1985 [8].

Ở nước ta, cũng có rất nhiều mô hình tính toán dòng chảy và vận chuyển bùn cát trong sông, các mô hình này là mã nguồn mở, thuận lợi cho việc chỉnh sửa code cũng như kết nối với các hệ thống khác. Điển hình có các mô hình như: Mô hình Delta; Mô hình SAL và VRSAP-SAL: Do Nguyễn Tất Đắc phát triển từ năm 1980 và sau đó được nâng cấp và kết hợp với mô hình VRSAP để tạo thành mô hình mang tên VRSAP-SAL hoàn thiện hơn về thuật toán và chương trình [9]; Mô hình KOD-01 và KOD-02 [10–11]; Mô hình MK4 [12]. Mô hình TREM là mô hình biến dạng lòng dẫn 2 chiều trong hệ tọa độ phi tuyến không trực giao cho phép xác định sự phân bố tốc độ cũng như biến đổi đáy sông theo cả hướng dọc và hướng ngang. Mô hình này đã áp dụng và cho kết quả tốt cho nhiều đoạn sông cong trên sông Hồng [13–15].

Các kết quả nghiên cứu ứng dụng mô hình này trên thế giới cũng như ở trong nước, cho thấy mô hình vẫn dự báo tốt diễn biến lòng dẫn, mà chủ yếu là diễn biến đáy qua việc giải các phương trình liên quan đến thủy lực và vận chuyển bùn cát. Tuy nhiên, tại đường bờ của các khu vực nghiên cứu, kết quả từ các mô hình toán trên hệ tọa độ Đề các vẫn còn bị sai số, đặc biệt là tại các vùng nghiên cứu có địa hình phức tạp.

Trong hệ tọa độ cong, vì trường vận tốc được tính toán trên lưới cong (là lưới thường được xây dựng phỏng theo các đường bờ) nên kết quả mô phỏng ở những khu vực có địa hình phức tạp tốt hơn, do đó, sai số sẽ ít hơn. Vì sự cần thiết như trên, bài báo này trình bày việc xây dựng mô hình toán thủy động lực và vận chuyển bùn cát lơ lửng dựa vào lời giải trong hệ tọa độ cong của hệ phương trình Reynolds, kết hợp với hệ phương trình chuyển tải bùn cát, lấy trung bình theo chiều sâu, có tính đến hàm số nguồn, mô tả tốc độ bốc lên hay lắng xuống của hạt.

## 2. Phương pháp nghiên cứu

### 2.1. Cơ sở lý thuyết mô hình thủy động lực

#### 2.1.1. Hệ phương trình thủy động lực

Hệ phương trình thủy động lực cơ bản dựa vào hệ phương trình Reynolds trên hệ tọa độ Đề Các như sau (1) [16].

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= -g \frac{\partial(\zeta)}{\partial x} - \frac{k u (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h + \zeta} \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - f v &= -g \frac{\partial(\zeta)}{\partial x} - \frac{k u (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}}{h + \zeta} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(h + \zeta) u] + \frac{\partial}{\partial y} [(h + \zeta) v] &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Trong đó  $H = h + \zeta$  (m);  $t$  là thời gian (s);  $u, v$  là thành phần vận tốc trung bình theo độ sâu của hai phương Ox và Oy (m/s);  $h$  là độ sâu (m);  $\zeta$  là mực thủy triều (m);  $f$  là tham số Coriolis (1/s);  $f = 2\omega \sin \varphi$ ;  $\varphi$  là vĩ độ địa lý;  $\omega$  là vận tốc quay của trái đất;  $k$  là hệ số ma sát đáy.

Sau một số biến đổi, hệ phương trình trên  $(x, y)$  trong tọa độ cong  $(\xi, \eta)$  có dạng như phương trình (2) sau:

$$\begin{cases} \frac{\partial p}{\partial \tau} + gHJ^{-1} \left( g_{22} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} - g_{12} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} \right) = \Psi_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \tau} + gHJ^{-1} \left( g_{11} \frac{\partial \zeta}{\partial \eta} - g_{12} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} \right) = \Psi_2 \\ J \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\partial q}{\partial \eta} = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Trong đó  $\tau = t$ ;  $p = JUH$ ;  $q = JVH$ ;  $p$  và  $q$  là thông lượng được tính theo  $\xi, \eta$ , với giả định về sự vuông góc của các đường tọa độ với biên miền tính ( $m^3/s$ );  $U, V$  là thành phần “Contravariant” của vector vận tốc trong tọa độ cong (1/s).

$$U = J^{-1} \left( u \frac{\partial y}{\partial \eta} - v \frac{\partial x}{\partial \eta} \right); \quad V = J^{-1} \left( -v \frac{\partial y}{\partial \xi} - u \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (3)$$

$$\Psi_1 = \Psi_{a1} + \Psi_{t1} + \Psi_{k1}; \quad \Psi_2 = \Psi_{a2} + \Psi_{t2} + \Psi_{k2} \quad (4)$$

Trong đó  $J$  là ma trận chuyển đổi “Jacobian” ( $m^2$ );

$$J = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi}; \quad 0 \neq J < \infty$$

Trong đó  $\Psi_{a1}, \Psi_{a2}$  là thành phần phi tuyến trong tọa độ cong theo  $\xi, \eta$ .

$$\Psi_{a1} = - \left[ \frac{\partial(pU)}{\partial \xi} + \frac{\partial(pV)}{\partial \eta} + JH(U^2 \Gamma_{11}^1 + 2UV \Gamma_{12}^1 + V^2 \Gamma_{22}^1) \right]; \quad (5)$$

$$\Psi_{a2} = - \left[ \frac{\partial(qU)}{\partial \xi} + \frac{\partial(qV)}{\partial \eta} + JH(U^2 \Gamma_{11}^2 + 2UV \Gamma_{12}^2 + V^2 \Gamma_{22}^2) \right]; \quad (6)$$

Trong đó  $\Gamma_{i,j}^k$  ký hiệu Cristoffel loại II, được xác định dưới dạng sau:

$$\Gamma_{i,j}^k = \frac{\partial e_i}{\partial \xi^j} e^k \quad (7)$$

Trong đó  $\Psi_{t1}, \Psi_{t2}$  là thành phần ma sát đáy.

$$\Psi_{t1} = -\frac{K}{H}|v|p; \quad \Psi_{t2} = -\frac{K}{H}|v|q; \quad (8)$$

Trong đó  $K$  là hệ số ma sát đáy;  $\Psi_{k1}, \Psi_{k2}$  là thành phần lực Coriolic.

$$\Psi_{k1} = fJ^{-1}[g_{12}p + g_{22}q] \quad \Psi_{k2} = -fJ^{-1}[g_{11}p + g_{12}q] \quad (9)$$

### 2.1.2. Lưới tính toán

Lưới tính toán được xây dựng nhờ giải phương trình Ellip dưới dạng đạo hàm riêng phần, là phương trình Poisson [17–19].

$$\Delta^2 \xi = P(\xi, \eta); \quad \Delta^2 \eta = Q(\xi, \eta) \quad (10)$$

Trong đó  $P, Q$  là các hàm số điều khiển lưới [19].

Lời giải của hệ phương trình này trong khu vực tính toán  $(\xi, \eta)$  có dạng sau:

$$L(r) = g_{22} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 r}{\partial \xi \partial \eta} - g_{11} \frac{\partial^2 r}{\partial \eta^2} = -J^2 \left( P \frac{\partial r}{\partial \xi} + Q \frac{\partial r}{\partial \eta} \right) \quad (11)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j};$$

$$\begin{aligned} g_{22} &= \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} \right|^2; \\ g_{12} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta}; \\ g_{11} &= \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} \right|^2 \end{aligned} \quad (12)$$

Các phương trình chuyển động, sau khi chuyển sang tọa độ cong, sẽ được giải trên lưới này.

### 2.1.3. Điều kiện biên của bài toán

Điều kiện tại biên lòng cho dưới dạng dao động mực nước  $\zeta$ . Trên biên cứng (bờ) có điều kiện [19]:  $p=0$  trên  $\xi = \text{const}$ ;  $q=0$  trên  $\eta = \text{const}$  (13)

## 2.2. Cơ sở lý thuyết của mô hình vận chuyển bùn cát

### 2.2.1. Hệ phương trình vận chuyển bùn cát

Phương trình vận chuyển bùn cát trong tọa độ cong dựa trên phương trình vận chuyển bùn cát 2D trên hệ tọa độ Đề các [16]:

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \gamma_v \left( u \frac{\partial C}{\partial x} + v \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial x} \left( HK_x \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{1}{H} \frac{\partial}{\partial y} \left( HK_y \frac{\partial C}{\partial y} \right) + \frac{S}{H} \quad (14)$$

Trong đó:  $C$  là nồng độ bùn cát lơ lửng tại từng thời điểm trong không gian ( $\text{kg/m}^3$ );  $u$ ,  $v$  là thành phần vận tốc dòng chảy theo phương  $x$ ,  $y$  ( $\text{m/s}$ );  $K_x$ ,  $K_y$  là hệ số khuếch tán rối theo phương  $x$ ,  $y$  ( $\text{m}^2/\text{s}$ );  $S$  là hàm số nguồn, mô tả sự bốc lên hay lắng xuống của hạt ( $\text{m/s}$ );  $\gamma_v$  là hệ số phân bố vận tốc theo chiều sâu.

Ta có:

$$\frac{\partial C}{\partial x} = J^{-1} \left( \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} \right); \quad \frac{\partial C}{\partial y} = -J^{-1} \left( \frac{\partial C}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} - \frac{\partial C}{\partial \eta} \frac{\partial x}{\partial \xi} \right) \quad (15)$$

Phương trình trên tọa độ cong được viết lại như phương trình (16) sau khi biến đổi, chấp nhận hệ số khuếch tán rối theo mọi phương là như nhau, phương trình (14) trở thành:

$$\frac{dC}{d\tau} + J^{-1} H^{-1} \gamma_v \left( p \frac{\partial C}{\partial \xi} + q \frac{\partial C}{\partial \eta} \right) = S + K_r J^{-1} \left[ \left( \gamma_0 \frac{\partial C}{\partial \xi} - \beta_0 \frac{\partial C}{\partial \eta} \right)_{\xi} + \left( \alpha_0 \frac{\partial C}{\partial \eta} - \beta_0 \frac{\partial C}{\partial \xi} \right)_{\eta} \right] \quad (16)$$

Trong đó  $\gamma_0 = J^{-1} g_{22}$ ;  $\beta_0 = J^{-1} g_{12}$ ;  $\alpha_0 = J^{-1} g_{11}$ .

$C_t$  là nồng độ bùn cát lơ lửng tại từng thời điểm trong không gian ( $\text{kg/m}^3$ );  $K_r$  là hệ số khuếch tán rối theo phương ngang ( $\text{m}^2/\text{s}$ ).

$S$  là hàm số nguồn, mô tả sự bốc lên hay lắng xuống của hạt ( $\text{m/s}$ ), cơ chế bồi và xói được tính toán như sau:

$$\begin{aligned} S &= E [20-21] && \text{đối với } \tau_b > \tau_e \\ S &= -D [20-21] && \text{đối với } \tau_b < \tau_d \\ S &= 0 && \text{đối với } \tau_d \leq \tau_b \leq \tau_e \end{aligned}$$

Trong đó  $E$  là tốc độ xói (m/s);  $D$  là tốc độ bồi lắng (m/s);  $\tau_b$  là ứng suất tiếp đáy ( $N/m^2$ );  $\tau_d$  là ứng suất tiếp đáy tới hạn đối với bồi ( $N/m^2$ );  $\tau_e$  là ứng suất tiếp đáy tới hạn đối với xói ( $N/m^2$ ).

### 2.2.2. Điều kiện biên

Điều kiện biên rắn được viết lại dưới dạng:

$$C_\xi = \frac{g_{12}}{g_{22}} C_\eta \quad \text{Điều kiện } \xi = \text{const}; \quad (17)$$

$$C_\eta = \frac{g_{12}}{g_{11}} C_\xi \quad \text{Điều kiện } \eta = \text{const}. \quad (18)$$

Điều kiện trên biên lỏng là không đổi:  $C = C_0$  (19)

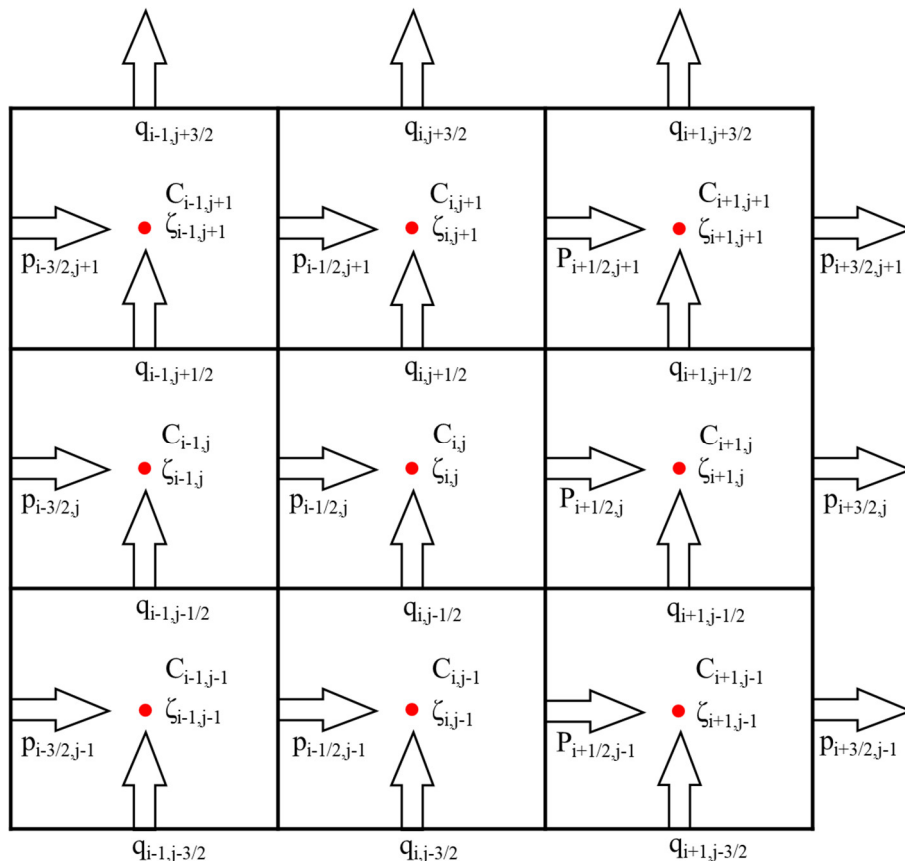
Đối với lưới cong trực giao, vì  $g_{12} = 0$  nên  $C_\xi = 0$ ,  $C_\eta = 0$

### 2.3. Sơ đồ giải

Hệ phương trình (2) được tích phân bằng phương pháp sai phân luân hướng trên lưới – C–Arakov (Hình 1) [22]. Nghiệm của bài toán được tính theo từng nửa bước thời gian:

Tại nửa bước thời gian đầu  $t+1/2$ : thực hiện giải ẩn  $p$  (thành phần theo phương  $\xi$ ) và mực nước  $\zeta$ , thành phần  $q$  (thành phần vận tốc theo phương  $\eta$ ) được giải hiện. Sau đó kết hợp giải xen kẽ nồng độ  $C$  (với các thành phần theo phương  $\xi$  giải ẩn, theo phương  $\eta$  giải hiện).

Tại nửa bước thời gian sau  $t+1$ : mực nước  $\zeta$  và biến số  $q$  được giải ẩn, thành phần  $p$  được giải hiện. Sau đó kết hợp giải xen kẽ nồng độ  $C$  (với các thành phần theo phương  $\xi$  giải ẩn, theo phương  $\eta$  giải hiện).



Hình 1. Lưới C–Arakov.

### 2.3.1. Đối với mô hình thủy lực

Lời giải  $p$ ,  $\zeta$ ,  $q$  trên nửa bước đầu: Tại nửa bước thời gian đầu, áp dụng giải ẩn cho phương trình chuyển động theo phương  $\xi$ , kết hợp với phương trình liên tục trong hệ phương trình (1). Ta có phương trình (21) và (21) sau:

$$\frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i+\frac{1}{2},j}^n}{\Delta t/2} + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^n \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} \right) - \beta_{i+\frac{1}{2},j}^n \left( \frac{\zeta_{i+1,j}^n + \zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i+1,j-1}^n - \zeta_{i,j-1}^n}{4\Delta \eta} \right) = (\Psi_1)_{i+\frac{1}{2},j}^n \quad (20)$$

$$J_{i,j} \left( \frac{\zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^n}{\Delta t/2} \right) + \frac{p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} - p_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta \xi} + \frac{q_{i,j+\frac{1}{2}}^n - q_{i,j-\frac{1}{2}}^n}{\Delta \eta} = 0 \quad (21)$$

Sau một số biến đổi, ta quy về hệ phương trình ba đường chéo (22) như sau:

$$a_i p_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + b_i p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + c_i p_{i+\frac{3}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} = d_i \quad (22)$$

$$a_i = -\frac{J_{i+1,j}}{J_{i,j}}; b_i = 1 + \frac{J_{i+1,j}}{J_{i,j}} + \frac{4}{\Delta t^2} \frac{J_{i+1,j}}{\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^n}; d_i = \frac{2}{\Delta t^2} \frac{J_{i+1,j}}{\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^n} R_{i+\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{\Delta t} \frac{J_{i+1,j}}{J_{i,j}} S_{i,j}^n - \frac{1}{\Delta t} S_{i+1,j}^n$$

Trong đó:  $S_{i,j}^n = 2J_{i,j} \zeta_{i,j}^n - \Delta t \left( q_{i,j+\frac{1}{2}}^n - q_{i,j-\frac{1}{2}}^n \right)$ ;  $R_{i+\frac{1}{2}}^n = \Delta t (\Psi_1)_{i+\frac{1}{2},j}^n + 2p_{i+\frac{1}{2},j}^n + \Delta t \beta_{i+\frac{1}{2},j}^n Z_{\eta}^n$

$$Z_{\eta}^n = \frac{(\zeta_{i+1,j+1}^n + \zeta_{i,j+1}^n + \zeta_{i+1,j-1}^n + \zeta_{i,j-1}^n)}{4\eta}$$

Sau đó, kết hợp với điều kiện biên vào và giải truy đuổi cho phương trình (22). Ở đây, với biên trái và phải là biên lỏng, thì ứng với:

$$i = 1 \text{ thì } p_{1/2,j}^{n+1/2}$$

$$i = L \text{ thì } p_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1/2}$$

Để tính  $p_{1/2,j}^{n+1/2}$  và  $p_{k+\frac{1}{2},j}^{n+1/2}$  cần phải thế  $i = 1/2$  và  $i = k - 1$  vào phương trình liên tục. Tiến hành biến đổi và tính toán lại hệ số trong phương trình truy đuổi cho thành phần  $p$  sẽ thu được công thức biến đổi của hệ số  $b_i$  và  $d_i$  lần lượt cho  $i = 1$  và  $i = K$  là:

Với  $i = 1$ :

$$b(i) = b(i) + a(i)$$

$$d(i) = d(i) - a(i) * \frac{2 * J_{i,j} * \zeta_{i,j}^n - S_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Với  $i = K$ :

$$b(i-1) = b(i-1) + c(i-1)$$

$$d(i-1) = d(i-1) + c(i-1) * \frac{2 * J_{K,j} * \zeta_{i,j}^n - S_{i,j}^n}{\Delta t}$$

Thế hệ số  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $d_i$  mới tính được vào phương trình truy đuổi (22), tính được giá trị  $p(i, j)$  cho toàn miền. Sau khi giải được giá trị vận tốc theo phương  $\xi$  cho toàn miền là  $p$ . Thế giá trị  $p$  vừa tính vào hệ phương trình (20–22) tính được giá trị của mực nước  $\zeta$ .

$$\zeta_{i,j}^{n+1/2} = \frac{1}{2 * J_{i,j}} \left( S_{i,j}^n - \Delta t p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} + \Delta t p_{i-\frac{1}{2},j}^{n+\frac{1}{2}} \right) \quad (23)$$

Sau khi đã có giá trị của  $p$  và  $\zeta$ , tiến hành sai phân hiện cho thành phần  $q$  theo phương  $\eta$  bằng phương trình (23) thu được phương trình (24) sau:

$$q_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} \left( (\Psi_2)_{i,j+\frac{1}{2}}^n + \beta_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \cdot Z_{\xi}^{n+\frac{1}{2}} - \alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^n \frac{\zeta_{i,j+1}^n - \zeta_{i,j}^n}{\Delta \eta} \right) + q_{i,j+\frac{1}{2}}^n \quad (24)$$

$$\text{Trong đó } Z_{\xi}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{\zeta_{i+1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \zeta_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{4\Delta \xi}$$

Từ phương trình (24), tính được giá trị thành phần q theo phương  $\eta$  cho toàn miền tại nửa bước thời gian đầu.

Làm tương tự với nửa bước thời gian sau, ta có phương trình ba đường chéo (25) sau:

$$a_j q_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} + b_j q_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + c_j q_{i,j+\frac{3}{2}}^{n+1} = d_j \quad (25)$$

$$a_j = \left( -\frac{J_{i,j+1}}{J_{i,j}} \right); b_j = \left( \frac{4}{\Delta t^2} \cdot \frac{J_{i,j+1}}{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}} + 1 + \frac{J_{i,j+1}}{J_{i,j}} \right); c_j = -1$$

$$d_j = \frac{2}{\Delta t^2} \cdot \frac{J_{i,j+1}}{\alpha_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}} \cdot RR_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{\Delta t} \cdot \frac{J_{i,j+1}}{J_{i,j}} SS_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{\Delta t} \cdot SS_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}}$$

Sau đó, kết hợp với điều kiện biên vào và giải truy đuổi cho phương trình ba đường chéo (25). Ở đây, với biên trên và dưới là biên rắn, thì ứng với:

$$\begin{cases} q_{i,1/2}^{n+1/2} = 0 \\ q_{i,k+1/2}^{n+1/2} = 0 \end{cases}$$

Thế vào phương trình (25) giải truy đuổi, sẽ thu được giá trị thành phần q theo phương  $\eta$ . Sau đó, tính được giá trị của mực nước  $\zeta$ :

$$\zeta_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2J_{i,j}} \left( SS_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \Delta t q_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+1} + \Delta t q_{i,j-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \quad (26)$$

Sau khi đã có giá trị của q và  $\zeta$ , tiến hành sai phân hiện cho thành phần p theo phương  $\xi$ , ta thu được phương trình (27) sau:

$$p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} = \frac{\Delta t}{2} \left( (\Psi_1)_{i+\frac{1}{2},j}^n + \beta_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \cdot Z_{\eta}^{n+1} - \gamma_{i,j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \frac{\zeta_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \zeta_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta \eta} \right) + p_{i+\frac{1}{2},j}^{n+1} \quad (27)$$

$$\text{Trong đó } Z_{\eta}^{n+1} = \frac{\zeta_{i+1,j+1}^{n+1} + \zeta_{i,j+1}^{n+1} + \zeta_{i+1,j-1}^{n+1} + \zeta_{i,j-1}^{n+1}}{4\Delta \eta}$$

Từ phương trình (27), tính được giá trị thành phần p theo phương  $\xi$  cho toàn miền tại nửa bước thời gian sau. Mô hình thủy động lực được viết bằng ngôn ngữ QB64, kết quả đầu ra của mô hình là mực nước  $\zeta$  và vận tốc trên toàn miền tính.

### 2.3.2. Đối với mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng

Tại nửa bước thời gian đầu, phương trình (16) có thể được viết lại với dạng phương ba đường chéo (28) như sau:

$$a_i \cdot C_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}} + b_i \cdot C_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + e_i \cdot C_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} = d_i^n, \quad (28)$$

Trong đó:

$$\begin{aligned}
 a_i &= -\frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ \frac{1}{2} J_{i,j}^{-1} \cdot (H_{i,j}^{-1})^{n+\frac{1}{2}} \cdot \gamma_v \cdot p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{K J_{i,j}^{-1} (g_{22})_{i-\frac{1}{2},j}}{J_{i-\frac{1}{2},j} \cdot \Delta\xi} \right]; \\
 b_i &= 1 + \frac{\Delta t}{2} \left[ \frac{K J_{i,j}^{-1}}{\Delta\xi^2} \left( \frac{(g_{22})_{i+\frac{1}{2},j}}{J_{i+\frac{1}{2},j}} + \frac{(g_{22})_{i-\frac{1}{2},j}}{J_{i-\frac{1}{2},j}} + \frac{\gamma_c \omega_s}{H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}}} \right) \right] \\
 e_i &= \frac{\Delta t}{2\Delta\xi} \left[ \frac{1}{2} J_{i,j}^{-1} \cdot H_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \cdot \gamma_v \cdot p_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \frac{K J_{i,j}^{-1} (g_{22})_{i+\frac{1}{2},j}}{J_{i+\frac{1}{2},j} \cdot \Delta\xi} \right]; \\
 d_i^n &= C_{i,j}^n \frac{\Delta t}{2} \left( (F_1)_{i,j}^n + S_{i,j} \right)
 \end{aligned} \tag{29}$$

Số hạng “K” của phương trình được giải bằng phương pháp truy đổi với điều kiện như sau:

$$\begin{cases} C_{1,j} = C_{2,j} \\ C_{k-1,j} = C_{k,j} \end{cases} \tag{30}$$

Tại nửa bước thời gian sau, phương trình (16) có thể được viết dưới dạng phương trình ba đường chéo như phương trình (31) sau:

$$a_j \cdot C_{i,j-1}^{n+1} + b_j \cdot C_{i,j}^{n+1} + e_j \cdot C_{i,j+1}^{n+1} = d_j^{n+\frac{1}{2}}, \tag{31}$$

Trong đó

$$\begin{aligned}
 a_j &= -\frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ \frac{1}{2} J_{i,j}^{-1} \cdot (H^{-1})_{i,j}^{n+1} \cdot \gamma_v \cdot q_{i,j}^{n+1} + \frac{K_\Gamma J_{i,j}^{-1} (g_{11})_{i,j-\frac{1}{2}}}{J_{i,j-\frac{1}{2}} \cdot \Delta\eta} \right]; \\
 b_j &= 1 + \frac{\Delta t}{2} \frac{K_\Gamma J_{i,j}^{-1}}{\Delta\eta^2} \left( \frac{(g_{11})_{i,j+\frac{1}{2}}}{J_{i,j+\frac{1}{2}}} + \frac{(g_{11})_{i,j-\frac{1}{2}}}{J_{i,j-\frac{1}{2}}} + \frac{\gamma_c \omega_s}{H_{i,j}^{n+1}} \right); \\
 e_j &= \frac{\Delta t}{2\Delta\eta} \left[ \frac{1}{2} J_{i,j}^{-1} \cdot (H^{-1})_{i,j}^{n+1} \cdot \gamma_v \cdot q_{i,j}^{n+1} - \frac{K_\Gamma J_{i,j}^{-1} (g_{11})_{i,j+\frac{1}{2}}}{J_{i,j+\frac{1}{2}} \cdot \Delta\eta} \right]. \\
 d_i^n &= C_{i,j}^n \frac{\Delta t}{2} \left( (F_2)_{i,j}^n + S_{i,j} \right)
 \end{aligned} \tag{32}$$

Mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng được viết bằng ngôn ngữ QB64, kết quả đầu ra của mô hình là nồng độ C trên toàn miền tính.

### 3. Kết quả và thảo luận

#### 3.1. Kiểm tra mô hình thủy động lực trong tọa độ cong bằng bài toán trong kênh hẹp

3.1.1. Kiểm tra mô hình thủy động lực trong tọa độ cong bằng bài toán trong kênh hẹp bằng bài toán trong kênh hẹp



Mô hình trên tọa độ cong được áp dụng cho đoạn kênh hình chữ nhật một đầu hở cuối kênh; đáy nằm ngang; chiều dài  $L = 100$  m (là một bước sóng); bề rộng kênh 4 m (rất nhỏ so với chiều dài); độ sâu  $h = 1$  m.

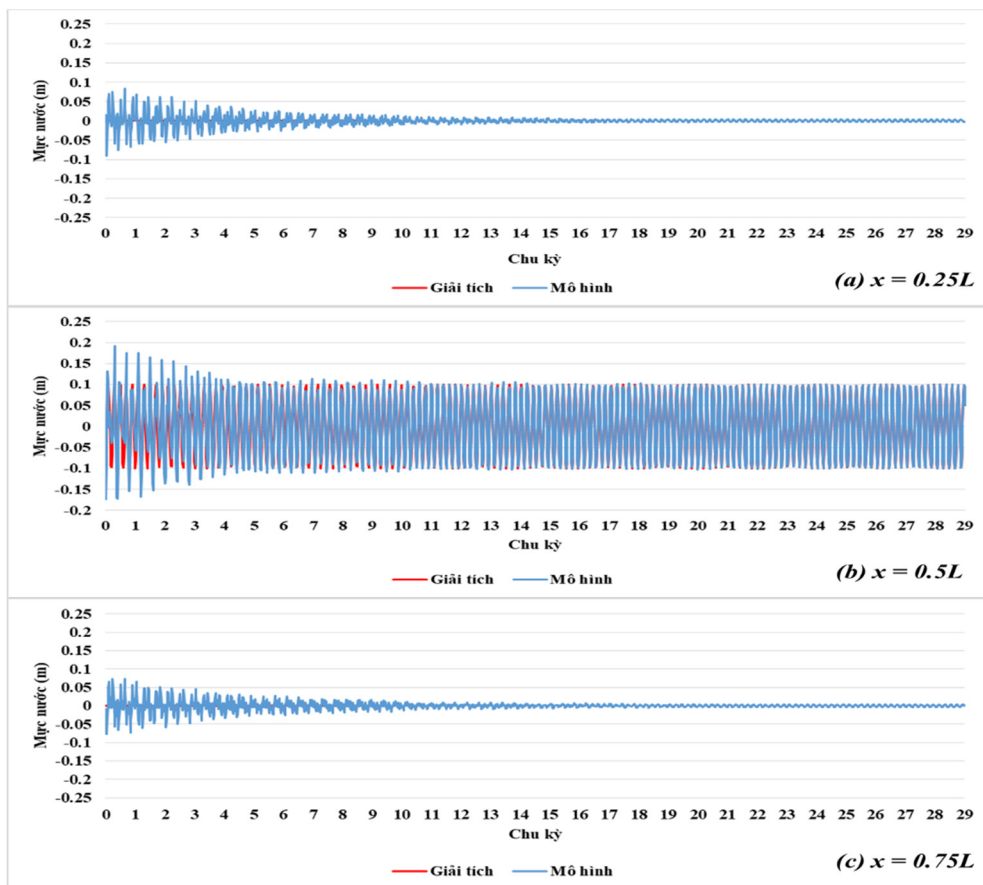
$$\begin{aligned} u &= v = 0 \\ \text{Điều kiện ban đầu } t = 0: \\ \zeta &= 0 \end{aligned}$$

Điều kiện biên: Tại cuối kênh ( $x = L$ ), cho dao động mực nước dạng  $z = z_0 \cos(\omega t)$ , với  $z_0 = 0,01$  m; chu kỳ  $T = 31.927$ s; Tại đầu kênh ( $x = 0$ ) điều kiện phản xạ toàn phần  $u = 0$

$$\text{Chọn: } \Delta t = 0,1\text{s}; \Delta x = \Delta y = 1\text{m}$$

Hệ phương trình (1) có nghiệm giải tích như sau:  $z(x,t) = z_0 \cos(\omega t) \cos(kx)$ ;  $u(x,t) = -\frac{C_0}{h} z_0 \sin(kx) \sin(\omega t)$

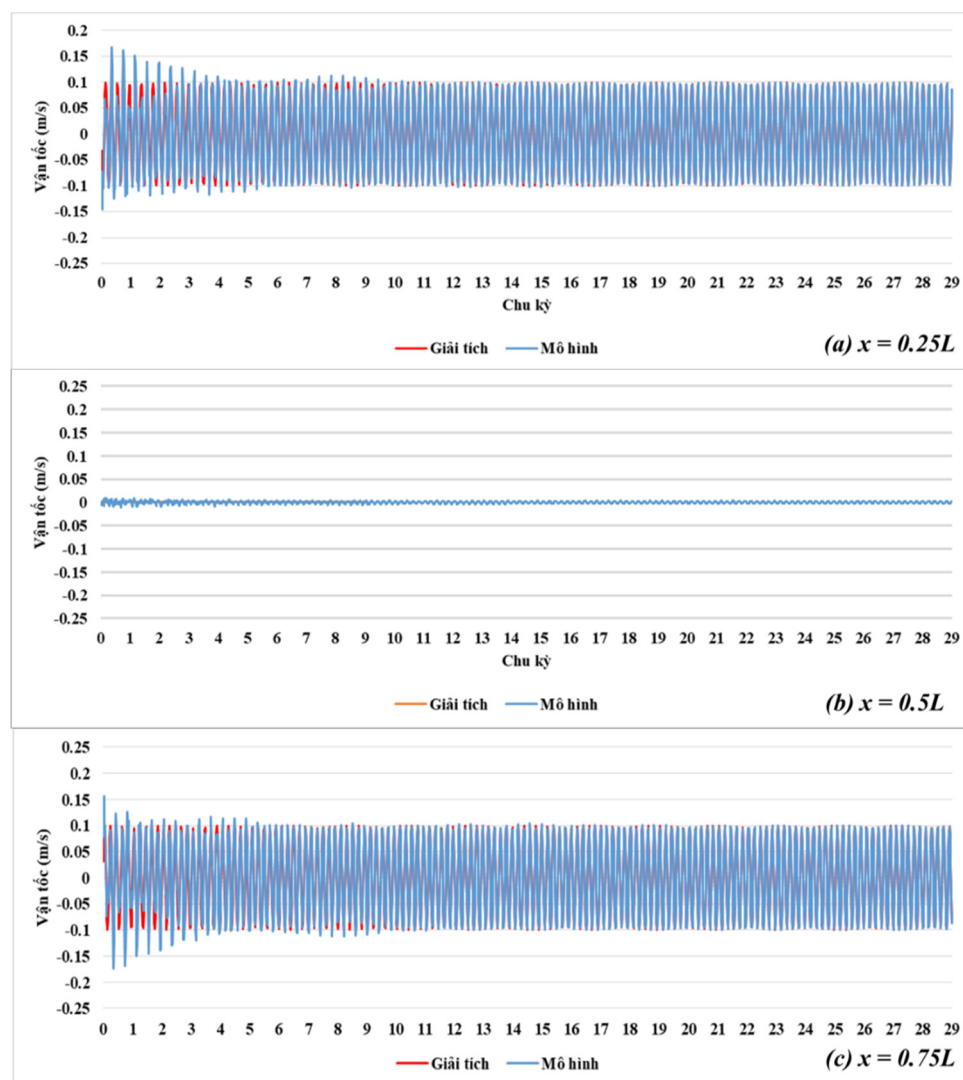
Mô hình trên tọa độ cong được mô phỏng với lưới cong được thiết lập là: số ô theo chiều dọc kênh là 100 ô, số ô theo chiều ngang kênh là 4. Kết quả tính toán từ mô hình và nghiệm lý thuyết được trình bày trong các Hình 2 và Hình 3.



**Hình 2.** Kết quả mực nước theo thời gian tại  $x = 0.25L$  (a),  $x = 0.5L$  (b) và  $x = 0.75L$  (c).

Nhận xét: tại  $x = 0,25L$  (Hình 2a) và  $x = 0,75L$  (Hình 2c) mực nước lý thuyết không dao động, trong 4 chu kỳ đầu mô hình bị ảnh hưởng của điều kiện ban đầu nên chưa dao động quanh 0; từ chu kỳ thứ 5 trở đi thì dao động mực nước của lời giải mô hình bắt đầu dao động quanh 0 và tiến tới gần trùng với nghiệm giải tích. Tại  $x = 0,5L$  (Hình 2b) mực nước dao động cực đại trong khoảng 3 chu kỳ đầu hai đường mô hình và giải tích chưa trùng nhau, nhưng từ chu kỳ thứ 4 trở đi thì bài toán đã đi vào ổn định, nghiệm của mô hình đã trùng với nghiệm giải tích. Sai số giữa kết quả mô hình là nghiệm giải tích tại  $x = 0,25L$  là 6,5% và tại  $x = 0,5L$  và  $0,75L$  lần lượt là 7,8% và 6,6%.

Tại  $x = 0,25L$  (Hình 3a) và  $x = 0,75L$  (Hình 3c), vận tốc của lời giải giải tích đạt cực đại, trong 3 chu kỳ đầu, lời giải của mô hình bị ảnh hưởng của điều kiện ban đầu chưa khớp với nghiệm giải tích; từ chu kỳ thứ 4 trở đi thì vận tốc của lời giải mô hình đã trùng với nghiệm giải tích. Tại  $x = 0,5L$  (Hình 3b) vận tốc dao động với biên độ cực tiểu, trong khoảng 2 chu kỳ đầu hai đường mô hình và giải tích chưa trùng nhau, từ chu kỳ thứ 3 trở đi nghiệm của mô hình đã tiến gần đến nghiệm giải tích. Sai số giữa kết quả mô hình là nghiệm giải tích tại  $x = 0,25L$  là 5,5% và tại  $x = 0,5L$  và  $0,75L$  lần lượt là 3% và 5,4%.



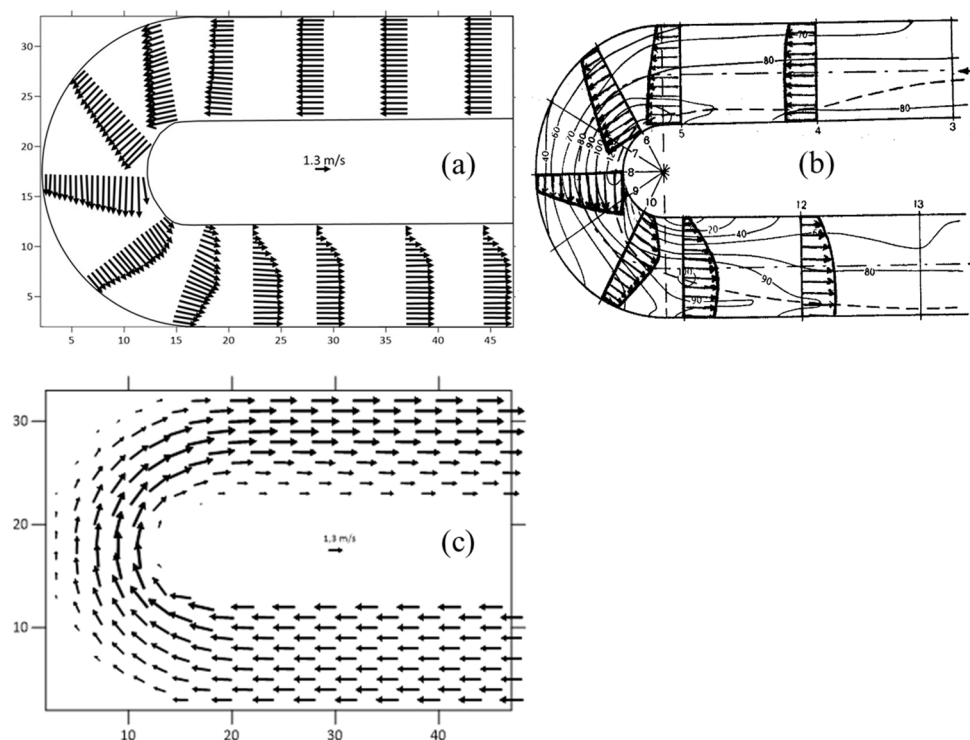
Hình 3. Kết quả vận tốc theo thời gian tại  $x = 0.25L$  (a),  $x = 0.5L$  (b) và  $x = 0.75L$  (c).

### 3.1.1. Kiểm tra mô hình thủy động lực trong tọa độ cong bằng bài toán trong kênh hẹp bằng bài toán trong kênh chữ U

Mô hình dòng chảy được áp dụng tính cho đoạn kênh cong đáy phẳng rộng 10 m, dài 90 m, có góc quay  $180^\circ$  với bán kính  $r = 15$  m. Bước không gian từ 0,5 m đến 1,5 m. Kết quả được vẽ trên Hình 4 cho 13 mặt cắt của kênh, sau đó so sánh với kết quả thí nghiệm của Shukry và kết quả tính toán trên kênh chữ U khi sử dụng mô hình thủy động lực trên hệ tọa độ Đề các.

Điều kiện ban đầu: Tại thời điểm ban đầu mặt nước hoàn toàn yên tĩnh, nghĩa là  $u, v, \zeta$  tại mọi điểm đều bằng 0.

Điều kiện biên: Tại đầu vào dưới của kênh, mực nước cho là hằng số theo thời gian và bằng 0,25 m, tại đầu ra ở trên cũng là hằng số theo thời gian và bằng 0 m.



**Hình 4.** Kết quả tính toán cho kênh chữ U bằng mô hình thủy động lực trên tọa độ cong (a), thí nghiệm của Shukry [23] (b) và kết quả tính toán trên kênh chữ U khi sử dụng mô hình thủy động lực trên hệ tọa độ Đề các (c).

Kết quả cho thấy trường vận tốc khi tính bằng mô hình thủy động lực trên tọa độ cong (Hình 4a) khá phù hợp với kết quả từ thí nghiệm của Shukry (Hình 4b). Sau khu vực uốn cong, trường vận tốc bị ép về phía bên bờ lõm (Hình 4a) và đây cũng là nguyên nhân chính gây nên hiện tượng xói lở khu vực này trong các đoạn cong của sông thiên nhiên. Khi tính toán bằng mô hình thủy động lực trên hệ tọa độ Đề các (Hình 4c), kết quả vận tốc sát bờ không tối ưu bằng tính trên hệ tọa độ cong, khi sau khu vực uốn cong, vận tốc bên bờ lõm lại nhỏ, gần như tiến về 0.

### 3.2. Kiểm tra mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng

Mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng được kiểm định với trường hợp miền tính đồng nhất, có chiều sâu không đổi, vận tốc  $u, v$  là hằng số, hệ số khuếch tán rối theo phương ngang  $K_T$  là hằng số, có một nguồn tức thời đổ vào miền tính với khối lượng  $M$ , hệ phương trình (14) có nghiệm giải tích như sau [24–25]:

$$c(x, y, t) = \frac{M/H}{4\pi\sqrt{K_x K_y} t} \exp\left(-\frac{(x-x_0-ut)^2}{4K_x t} - \frac{(y-y_0-vt)^2}{4K_y t} - \frac{D}{H} t\right) \quad (33)$$

Trong đó  $M$  là khối lượng phẩm màu được đổ vào điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$  trong miền tính bắt đầu tại thời điểm  $t > 0$ , miền tính có ma sát bằng 0.

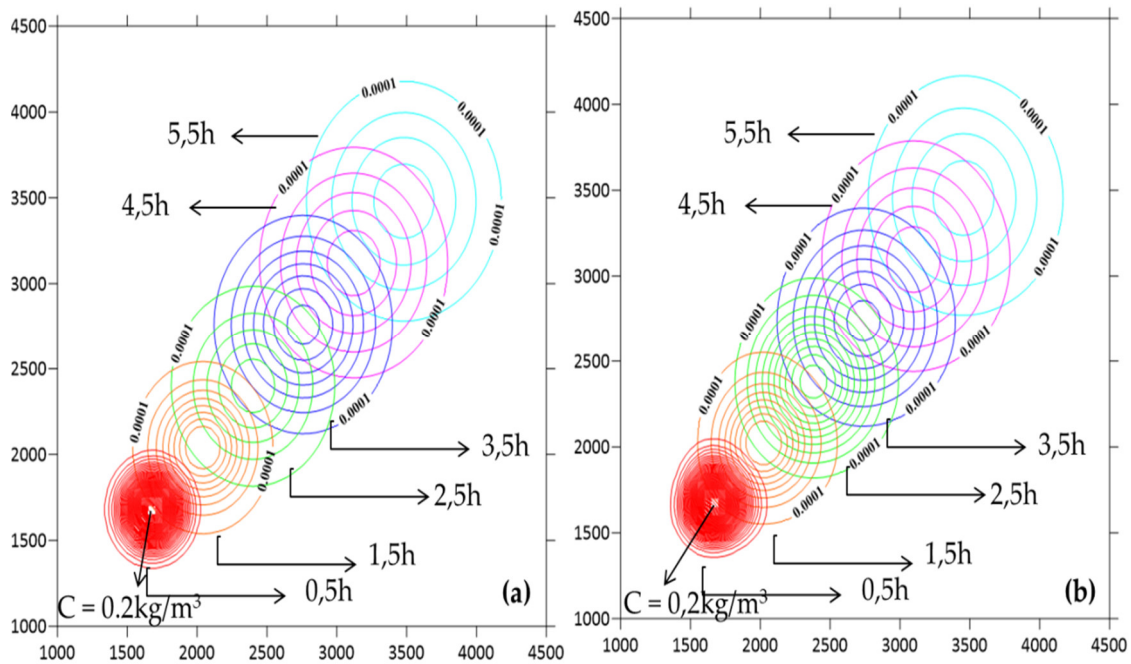
Tính toán được thực hiện cho miền tính vuông có độ sâu không đổi bằng 5m, kích thước 5000m x 5000m, với  $\Delta x = \Delta y = 50$  m, vận tốc lắng đọng  $D = 0,00002$  m/s,  $\Delta T = 10$ s, nguồn đổ vào miền tính tại vị trí  $(x_0 = 30\Delta x; y_0 = 30\Delta y)$  có khối lượng  $M$ .

3.2.1. Trường hợp 1: Khối lượng phẩm màu được đổ vào điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$  là  $M = 2500$  kg

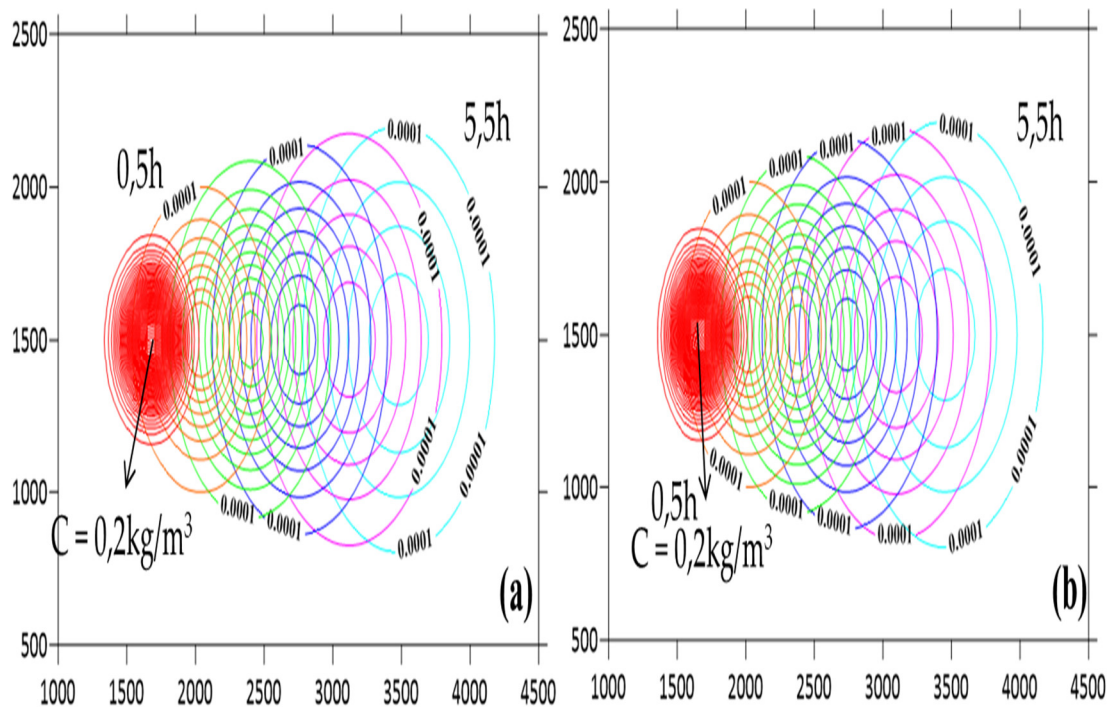
Mô hình được áp dụng tính trong 5,5 giờ với hệ số khuếch tán như sau:

- (i) TH1A:  $K_r = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = v = 0,1\text{m/s}$ .
- (ii) TH1B:  $K_r = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = 0,1\text{m/s}$ ;  $v = 0\text{m/s}$ .
- (iii) TH1C:  $K_r = 4\text{m}^2/\text{s}$ ;  $u = 0\text{m/s}$ ;  $v = 0,1\text{m/s}$ .

Các kết quả tính được trình bày dưới dạng các đường đồng mức nồng độ lần lượt tại 6 điểm thời gian ( $t = 0,5$  giờ;  $1,5$  giờ;  $2,5$  giờ;  $3,5$  giờ;  $4,5$  giờ;  $5,5$  giờ) từ nghiệm giải tích (Hình 5a, 6a và 7a) và từ mô hình (Hình 5b, 6b và 7b). Nồng độ tại vị trí ( $x_0 = 30\Delta x$ ;  $y_0 = 30\Delta y$ ) là  $C = 0,2\text{ kg/m}^3$  ( $C = \frac{M}{V}$ , với  $M$  là khối lượng và  $V$  là thể tích của ô).

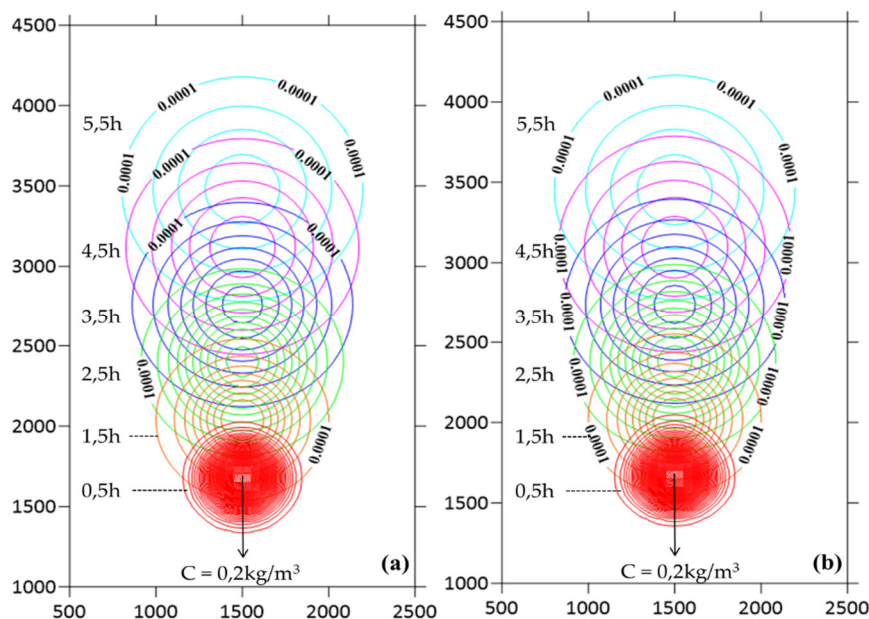


**Hình 5.** Kết quả tính toán cho TH1A bằng nghiệm giải tích (a) và bằng mô hình (b).



**Hình 6.** Kết quả tính toán cho TH1B bằng nghiệm giải tích (a) và bằng mô hình (b).





**Hình 7.** Kết quả tính toán cho TH1C bằng nghiệm giải tích (a) và bằng mô hình (b).

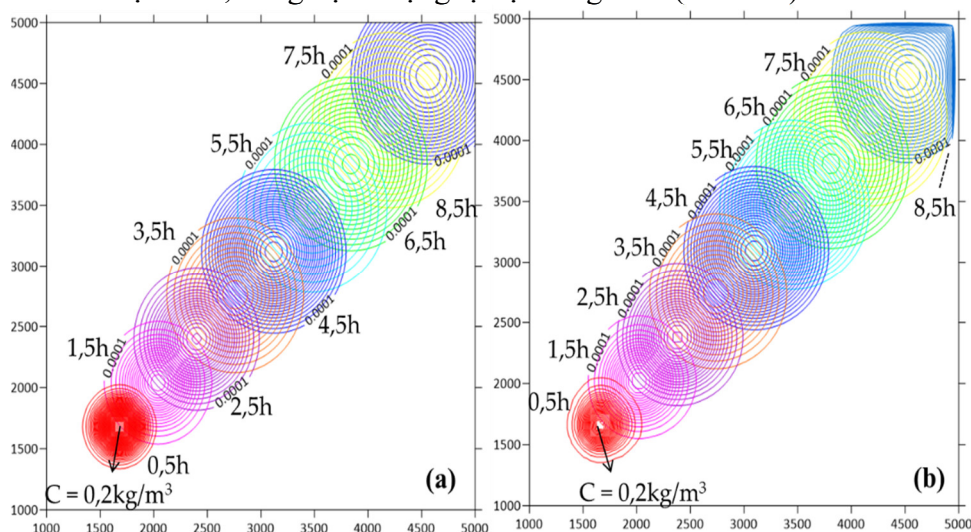
Kết quả cho thấy không có sự sai biệt lớn giữa kết quả tính toán trong 3 trường hợp khi sử dụng bằng mô hình và nghiệm giải tích.

Trong trường hợp 1A: Khi vận tốc theo phương  $u$  và  $v$  bằng nhau (bằng 0,1), nguồn thải lan truyền với hệ số khuếch tán  $K_T = 4 \text{ m}^2/\text{s}$  theo hướng 45 độ cho cả kết quả từ mô hình 5a và nghiệm giải tích hình 5b.

Trong trường hợp 1B: Khi vận tốc theo phương thẳng đứng  $v = 0 \text{ m/s}$ , nguồn đổ vào miền tính tại vị trí  $(x_0 = 30\Delta x; y_0 = 30\Delta y)$  lan truyền thẳng theo phương ngang cho cả kết quả từ mô hình 6a và nghiệm giải tích hình 6b.

Trong trường hợp 1C: Khi vận tốc theo phương ngang  $u = 0 \text{ m/s}$ , nguồn đổ vào miền tính lan truyền thẳng theo phương thẳng đứng cho cả kết quả từ mô hình 7a và nghiệm giải tích hình 7b.

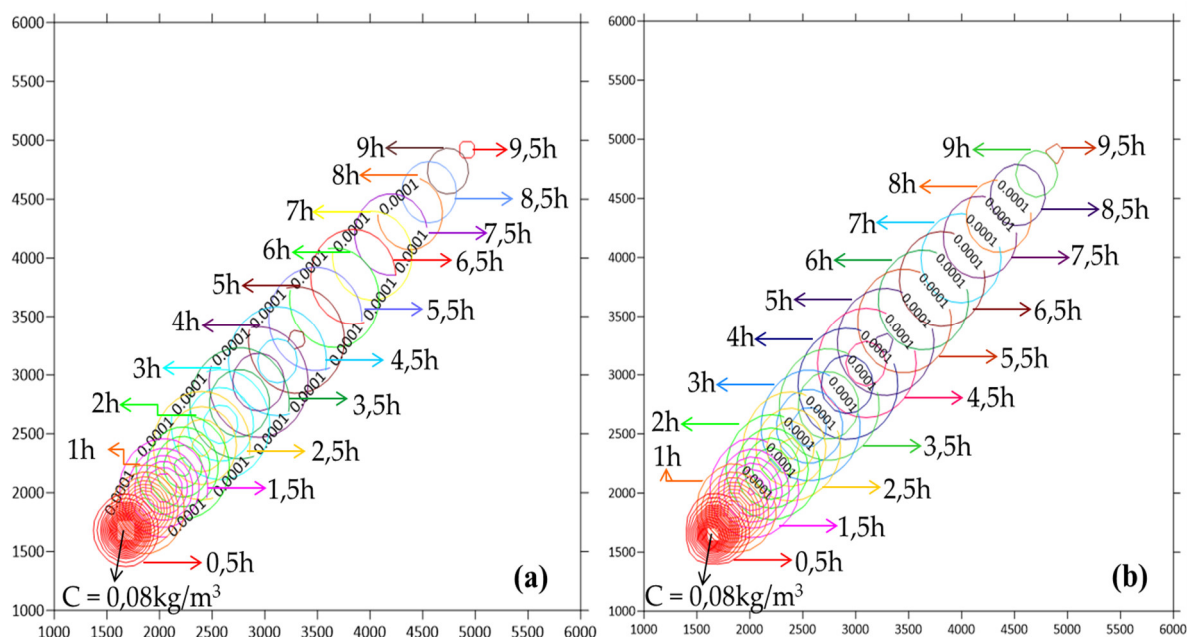
Khi tính tiếp tục đến 8,5 giờ ứng với TH1A (Hình 8), kết quả tính toán khi sử dụng bằng mô hình và nghiệm giải tích cho thấy: khi nồng độ lan truyền đến vị trí biên, do ảnh hưởng bởi điều kiện biên, nồng độ sẽ động lại tại vùng biên (Hình 8b).



**Hình 8.** Kết quả tính toán tiếp tục đến 8,5 giờ cho TH1A bằng nghiệm giải tích (a) và bằng mô hình (b).

3.2.2. Trường hợp 2: Khối lượng phẩm màu được đổ vào điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$  là  $M = 1000$  kg, tính trong 10 giờ và mở rộng vùng tính lên kích thước  $6000\text{m} \times 6000\text{m}$

Để thấy rõ sự lắng đọng hoàn toàn của khối lượng phẩm màu đổ vào điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$ , tính toán sẽ thực hiện với khối lượng phẩm màu giảm xuống còn  $M = 1000$  kg, tính trong 10 giờ và mở rộng vùng tính lên kích thước  $6000\text{m} \times 6000\text{m}$ . Vậy nồng độ tại điểm tọa độ  $(x_0, y_0)$  là  $0,08 \text{ kg/m}^3$ . Kết quả tính toán sau 9,5 giờ cho thấy, nồng độ  $C = 0,0001 \text{ kg/m}^3$  sẽ lắng đọng hoàn toàn. Kết quả tính toán bằng mô hình (Hình 9b) phù hợp với kết quả tính từ nghiệm giải tích (Hình 9a).



**Hình 9.** Kết quả tính toán khi giảm khối lượng bùn và mở rộng vùng tính bằng nghiệm giải tích (a) và bằng mô hình (b).

Nhìn chung, kết quả từ mô hình khá phù hợp với kết quả từ nghiệm giải tích. Nghiên cứu này bước đầu cho thấy sự tin cậy của mô hình chuyển tải trong hệ tọa độ vừa được thiết lập.

#### 4. Kết luận

Xây dựng mô hình thủy động lực và vận chuyển bùn cát lơ lửng trên hệ tọa độ cong với: (1) Mô hình thủy động lực trong tọa độ cong được xây dựng dựa trên hệ phương trình Reynolds trung bình theo chiều sâu. Lưới tính toán được xây dựng nhờ giải phương trình Ellip dưới dạng đạo hàm riêng phần. Các phương trình chuyển động, sau khi chuyển sang tọa độ cong, sẽ được giải trên lưới này; (2) Mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng trong tọa độ cong, được tính xen kẽ với mô hình thủy động lực thì dựa trên hệ phương trình chuyển tải bùn cát 2D trên hệ tọa độ Đề các. Hai mô hình này được kiểm định bằng nghiệm của lời giải lý thuyết.

Kết quả cho thấy, khi tính toán mực nước và vận tốc, thì các chu kỳ đầu dao động không ổn định, từ chu kỳ thứ năm trở đi, diễn biến mực nước và vận tốc giữa nghiệm giải tích và từ mô hình cho kết quả khá trùng khớp nhau. Khi tính toán thủy lực trên kênh chữ U, kết quả tính toán trường vận tốc khi sử dụng mô hình thủy động lực trên tọa độ cong cho thấy ưu điểm hơn so với khi sử dụng mô hình thủy động lực trên hệ tọa độ đề các. Mô hình vận chuyển bùn cát lơ lửng được kiểm tra với nhiều trường hợp (có cả vận tốc theo phương thẳng đứng và phương ngang, có vận tốc theo phương đứng và trường hợp cuối là chỉ có vận tốc theo phương ngang). Các kết quả thu được từ mô hình phù hợp với kết quả tính từ

nghiệm giải tích, điều này khẳng định độ tin cậy của mô hình vừa được thiết lập, có thể áp dụng tính toán cho một vùng nghiên cứu cụ thể. Tuy nhiên, mô hình này vẫn chưa xây dựng giao diện cho người sử dụng.

**Đóng góp của tác giả:** Xây dựng ý tưởng nghiên cứu: K.T.T.; P.N.K.; P.N.V.; L.N.K.T.; Lựa chọn phương pháp nghiên cứu: K.T.T.; P.N.K.; P.N.V.; Xử lý số liệu: L.N.K.T.; Mô hình hóa: K.T.T.; Lập trình: K.T.T.; L.N.K.T.; Phân tích kết quả: K.T.T.; B.N.T.; L.N.K.T.; Chỉnh sửa bài báo: K.T.T.; B.N.T.

**Lời cảm ơn:** NCS Trần Thị Kim, Mã số: 2020.TS.102 được tài trợ bởi Tập đoàn Vingroup – Công ty CP và hỗ trợ bởi Chương trình học bổng đào tạo thạc sĩ, tiến sĩ trong nước của Quỹ Đổi mới sáng tạo Vingroup (VINIF), Viện Nghiên cứu Dữ liệu lớn (VINBIGDATA).

**Lời cam đoan:** Tập thể tác giả cam đoan bài báo này là công trình nghiên cứu của tập thể tác giả, chưa được công bố ở đâu, không được sao chép từ những nghiên cứu trước đây; không có sự tranh chấp lợi ích trong nhóm tác giả.

### Tài liệu tham khảo

1. Van, R. L.C. Sediment transport, part I: bed load transport. *J. Hydraul. Eng.* **1984**, *110*, 1431–1456.
2. Rinaldi, M.; Wyzga, B.; Dufour, S.; Bertoldi, W.; Gurnell, A. River Processes and Implications for Fluvial Ecogeomorphology: A European Perspective. In: John F. Shroder (ed.) *Treatise on Geomorphology*, San Diego: Academic Press, **2013**, *12*, 37–52.
3. DHI, MIKE 21 & MIKE 3 Flow Model FM. Hydrodynamic and Transport Module, 2012.
4. Galland, J.C.; Goutal, N.; Hervouet, J.M. TELEMAC: A new numerical model for solving shallow water equations. *J. Adv. Water Resour.* **1991**, *14*, 138–148.
5. Putrevu, U.; Svendsen, I.A. Three-dimensional dispersion of momentum in wave-induced nearshore currents. *Eur. J. Mech. B Fluids.* **1999**, *18*, 409–427.
6. Jia, Y.; Wang S.S. Numerical model for channel flow and morphological change studies. *J. Hydraul. Eng.* **1999**, *125*, 924–933.
7. Van, R. L.C. Unified view of sediment transport by currents and waves. I: Initiation of motion, bed roughness, and bed-load transport. *J. Hydraul. Eng.* **2007**, *133*, 649–667.
8. Thomas, W.A.; McAnally, W.H. User's Manual for the Generalized Computer Program System Open-Channel Flow and Sedimentation TABS-2. Main Text and Appendices A through O, 1985.
9. Đắc, N.T. Mô hình toán cho dòng chảy và chất lượng nước trên hệ thống kênh sông. *NXB Nông nghiệp*, **2005**, 234.
10. Nien, N.A. Possible use of flood water for reclamation of acid sulphate soils in the Plain of Reeds (Mekong Delta). Workshop on Management of Acid Sulphate Soils, Ho Chi Minh City, 1995.
11. Nien, N.A.; Duong N.B. The Third Invariant Form of Hydrodynamic Equations and Application for Definition of Water Hammer Characteristics in Pipe. *Automation* **2014**, pp. 85.

12. Giang, L.S. MK4—A software for hydraulic and substances transport computation in river. In symposium fluid mechanic and natural disaster prevent. **1999**, 124–134.
13. Khai, N.H.; Giang, N.T.; Anh N.T. Research using 2–D model to evaluate the changes of riverbed. *VNU J. Sci.* **2003**, 19, 47.
14. Khải, N.H.; Giang, N.T. Nghiên cứu ứng dụng mô hình 2 chiều tính toán biến dạng lòng dẫn. *Tạp chí Khí tượng Thủy văn* **2003**, 512, 8–15.
15. Giang, N.T.; Đại, H.V. Đánh giá ảnh hưởng của các phương án chỉnh trị đến khả bồi xói của đoạn sông Hồng từ Cầu Long Biên đến Khuyến Lương bằng mô hình mô phỏng biến đổi lòng dẫn hai chiều. *Tạp chí Khoa học ĐHQGHN* **2011**, 27, 44–53.
16. Bay, N.T.; Toan, T.T.; Phung, N.K.; Nguyen–Quang, T. Numerical investigation on the sediment transport trend of Can Gio Coastal Area (Southern Vietnam). *J. Mar. Environ. Eng.* **2012**, 9, 191.
17. Massel, S.R., Hydrodynamics of coastal zones. *Elsevier*, 1989.
18. Thompson, J.F.; Warsi Z.U.; Mastin C.W. Numerical grid generation: foundations and applications. 1985.
19. Fletcher, C. Computational Techniques for Fluid Dynamics [Russian translation], *Mir. Moscow*. 1991.
20. Fletcher, C.A. Computational techniques for fluid dynamics 2: Specific techniques for different flow categories, *Springer–Verlag* 2012.
21. Van Rijn, L.C. Mathematical modeling of suspended sediment in nonuniform flows. *J. Hydraul. Eng.* **1986**, 112, 433–455.
22. Van Rijn, L.C. Sedimentation of dredged channels by currents and waves. *J. Waterw. Port Coast. Ocean Eng.* **1986**, 112, 541–559.
23. Shukry, A. Flow around bends in an open flume. *Transactions ASCE*. **1950**, 115, 751–78.
24. Ippen, A.T. Estuary and coastline hydrodynamics. *McGraw–Hill Book Company*, 1966.
25. Bầy, N.T.; Trang, M.Q. Mô hình tính toán chuyển tải bùn cát kết dính vùng ven biển– Phần I: Mô hình tính toán. *Tạp chí Phát triển Khoa học và Công nghệ ĐHQG Tp HCM* **2006**, 9, 53–60.

## **A coupled hydraulic and sediment transport model in the curvilinear coordinate**

**Tran Thi Kim<sup>1,2,4</sup>, Nguyen Khac Thanh Long<sup>3,4</sup>, Nguyen Van Phuoc<sup>5</sup>, Nguyen Ky Phung<sup>6</sup>, Nguyen Thi Bay<sup>3,4\*</sup>**

<sup>1</sup> Ho Chi Minh City University of Natural Resources and Environment;  
ttkim@hcmunre.edu.vn

<sup>2</sup> Institute of Environment and Natural Resources, Vietnam National University Ho Chi Minh City; ttkim@hcmunre.edu.vn

<sup>3</sup> University of Technology; ntbay@hcmut.edu.vn

<sup>4</sup> Vietnam National University Ho Chi Minh City; ntbay@hcmut.edu.vn

<sup>5</sup> Ho Chi Minh City Union of Science and Technology associations;  
nvphuoc196@gmail.com

<sup>6</sup> Institute of Computational Science and Technology; kyphungng@gmail.com



**Abstract:** This paper focuses on constructing a couple hydraulic and suspended sediment transport model on the curvilinear coordinate system. The original equations are the Reynolds equation system couple with the equations for suspended sediment transport, which averaged over the depth and combined a source function, describes the velocity of particles rising or settling. The reliability of these two models is verified by analytic solutions. The results show that, in the first periods, the water level fluctuation is unstable. From the fifth period onwards, the fluctuation of water level and velocity between analytical solution and model results show a good agreement. The suspended sediment transport model was verified in some cases (with both vertical and horizontal velocities, vertical velocities only, and horizontal velocities only). The verification results of the suspended sediment transport model do not have great differences between the simulation results in some cases when using the model and analytical solution. The results obtained that the model results are consistent with the analytical solution results, which mean that it initially confirms the reliability of the model. This study aims to build open source models for convenience of the connection with other models as well as prediction systems.

**Keywords:** Hydraulic; Suspended sediment transport; The curvilinear coordinate systems.