

ỨNG DỤNG HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN ĐỂ TÍNH TOÁN ĐƯỜNG MẶT NƯỚC TRONG SÔNG

PGS.PTS. Ngô Trọng Thuận
Viện Khí tượng - Thuỷ văn

1 - Cơ sở

Hồ chứa Hoà Bình thuộc công trình thủy điện đã hoàn thành và đi vào vận hành trong một vài năm gần đây. Trong điều kiện xả lũ, đặc biệt là phải xả lũ lớn, hệ thống đê ở hạ lưu sông Đà có nguy cơ bị uy hiếp do mực nước dâng cao. Do đó, việc xác định đường mặt nước khi xả lũ cao là một vấn đề rất có ý nghĩa trong công tác bảo vệ đê nói riêng và công tác phòng lũ ở hạ lưu sông Đà nói chung.

Để xác định đường mặt nước trong sông, có thể sử dụng phương trình Saint-Venant một chiều:

- Phương trình liên tục:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

- Phương trình chuyển động:

$$\frac{1}{gA} \frac{\partial Q}{\partial t} - \frac{Q}{gA^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\alpha Q}{gA^2} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\alpha Q^2}{gA^3} \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x} + S_f - S_o = 0 \quad (2)$$

Trong đó:

- | | |
|----------|--|
| Q | - Lưu lượng (m^3/s), |
| A | - Diện tích mặt cắt ướt (m^2), |
| y | - Độ sâu dòng chảy (m), |
| S_f | - Độ dốc thuỷ lực, |
| S_o | - Độ dốc lòng sông, |
| α | - Hệ số sửa chữa động năng, có thể chọn $\alpha \approx 1$. |

Nếu bỏ qua thành phần quán tính trong phương trình (2), thì hệ phương trình trên trở thành hệ phương trình khuếch tán sau:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} + S_f - S_o = 0 \quad (4)$$

Trước đây, việc nghiên cứu thường tập trung và khảo sát toán học, tìm phương pháp giải gần đúng hệ phương trình thủy động lực (1), (2) đầy đủ các thành phần. Những kết quả nghiên cứu gần đây cho thấy, nghiệm gần đúng của phương trình khuếch tán có độ chính xác tương đương với nghiệm của hệ phương trình (1) - (2), trong cả trường hợp sóng lũ là sóng xả, trừ khi có ảnh hưởng của thủy triều [1, 2, 3]. Do đó, có thể ứng dụng hệ phương trình (3), (4) để tính toán đường mặt nước của đoạn Hoà Bình-Trung Hà. Hiện nay, một trong những phương pháp hiệu quả

để giải phương trình sóng động lực học và sóng khuếch tán là phương pháp phân tử hữu hạn [1, 2].

Theo phương pháp phân tử hữu hạn, trong khoảng (x_i, x_{i+1}) , các ẩn số của phương trình liên tục (3) được xấp xỉ theo hàm nội suy $N(x)$ như sau:

$$\begin{cases} A(x, t) = N_i(x) A_i(t) + N_{i+1}(x) A_{i+1}(t) \\ Q(x, t) = N_i(x) Q_i(t) + N_{i+1}(x) Q_{i+1}(t) \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó: $N_i(x) = \frac{x_{i+1} - x}{\Delta x_i}$; $N_{i+1}(x) = \frac{x - x_i}{\Delta x_i}$

$\Delta x_i = \Delta x_{i+1} - x_i$ = độ dài của phần tử.

Để xấp xỉ không gian cho phương trình liên tục, áp dụng phương pháp Galerkin đối với phương trình (3) thu được:

$$\int_0^L \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) N_i dx = \sum_{i=1}^{N_e} \int_0^{\Delta x_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial t} \right) N_i dx \quad (6)$$

Trong đó: L - Độ dài đoạn sông cần tính,
 N_e - Số các phần tử.

Thay $A(x, t)$, $Q(x, t)$ từ (5) vào (6) và xét một phần tử sẽ có:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \{Q\} + N_i N_j \{\dot{A}\} \right] dx = 0 \quad (7)$$

Trong đó: \dot{A} là ký hiệu đạo hàm theo thời gian.

Để dàng tính được rằng:

$$\int_{x_1}^{x_2} \left(N_i \frac{\partial N_j}{\partial x} \right) dx \cdot \{Q\} = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \{Q\}$$

$$\int_{x_1}^{x_2} (N_i N_j) dx \cdot \{\dot{A}\} = \Delta x \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \{\dot{A}\}$$

Sau khi tổng hợp các thành phần có thể đưa về dạng phương trình vi phân sau:

$$\Delta x \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = 0 \quad (8)$$

Nếu xấp xỉ đạo hàm theo thời gian bằng sơ đồ hiện như sau:

$\dot{A}_t \approx [A_{t+\Delta t} - A_t]/2$ thì phương trình (8) trở thành:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{Bmatrix}_{(t+\Delta t)} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{A}_1 \\ \dot{A}_2 \end{Bmatrix}_t - \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix}_t \quad (9)$$

Phương trình (9) là phương trình viết cho một phần tử. Nếu ký hiệu:

$$[F_A] = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 \end{bmatrix} \frac{\Delta x}{\Delta t}; \quad [F_Q] = \begin{bmatrix} -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

thì phương trình (9) trở thành phương trình đại số tuyến tính sau:

$$[F_A] \{A\}_{t+\Delta t} = [F_A] \{A\}_t - [F_Q] \{Q\}_t \quad (10)$$

Ẩn số phải tìm là $\{A\}_{t+\Delta t}$. Vẽ phải được xác định theo điều kiện ban đầu là các đại lượng đã biết, do đó có thể giải phương trình trên bằng các phương pháp giải hệ phương trình đại số tuyến tính thông thường.

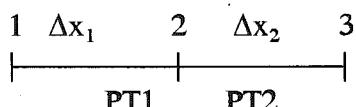
Viết phương trình (7) cho 2 phần tử (3 điểm), sau khi tổng hợp các hệ số có thể đưa về dạng (10), trong đó:

$$[F_A] = \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{3} & \frac{\Delta x_2}{6} & 0 \\ \frac{\Delta x_1}{6} & \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{3} & \frac{\Delta x_2}{6} \\ 0 & \frac{\Delta x_2}{6} & \frac{\Delta x_2}{3} \end{bmatrix};$$

$$[F_Q] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\{A\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{Bmatrix}; \quad \{Q\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{Bmatrix}$$

Sơ đồ 1: Hai phần tử, ba điểm:



Trong trường hợp đoạn Hoà Bình - Trung Hà được chia thành 13 phần tử (14 điểm) như sơ đồ 2 - bảng 1, các ma trận có dạng sau:

$$[\mathbf{F}_A] = \frac{1}{\Delta t} \begin{bmatrix} \frac{\Delta x_1}{3} & \frac{\Delta x_1}{6} & 0 \\ \frac{\Delta x_1}{6} & \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{3} & \frac{\Delta x_2}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta x_2}{6} & \frac{\Delta x_2 + \Delta x_3}{3} & \frac{\Delta x_3}{6} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta x_3}{6} & \frac{\Delta x_3 + \Delta x_4}{3} & \frac{\Delta x_4}{6} \\ \dots & \dots & \dots & \frac{\Delta x_{11}}{6} & \frac{\Delta x_{11} + \Delta x_{12}}{3} & \frac{\Delta x_{12}}{6} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \frac{\Delta x_{13}}{6} & \frac{\Delta x_{13}}{3} \end{bmatrix}$$

$$\{\mathbf{A}\} = \begin{Bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_{14} \end{Bmatrix}; \quad \{\mathbf{Q}\} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ \vdots \\ Q_{14} \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{F}_Q] = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \dots & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

Như vậy, phương trình (10) với điều kiện ban đầu $Q_0 = Q_{t=0}$ và điều kiện biên $Q_1 = Q_t$ có thể tính được diện tích mặt cắt tại thời điểm $(t+\Delta t)$ là $A_{t+\Delta t}$. Lưu lượng tại các điểm tính được xác định theo công thức Manning như sau:

$$Q(t + \Delta t) = \frac{1}{n} \left[\frac{S_f(t + \Delta t)}{P(t + \Delta t)} \right]^{1/2} [A(t + \Delta t)]^{5/3} \quad (11)$$

Trong đó: $P(t + \Delta t)$

$S_f(t + \Delta t)$

- Chu vi ướt, xác định theo $A(t + \Delta t)$,

- Độ dốc cản (độ dốc thủy lực) xác định từ phương trình chuyển động (4):

$$S_f(t + \Delta t) = S_0 - \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_{(t + \Delta t)} \quad (12)$$

Với y là độ sâu dòng chảy, xác định theo $A(t + \Delta t)$.

Theo sơ đồ tính trên, có thể tính được các đặc trưng như: diện tích mặt cắt ướt, lưu lượng và độ sâu dòng chảy tại mỗi điểm tính trong suốt quá trình xả lũ. Mực nước tại mỗi điểm được xác định như sau:

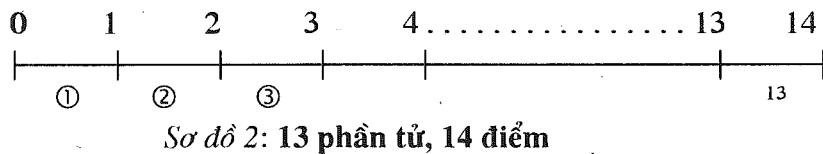
$$Z_i = Z_{oi} + y_i \quad (13)$$

Trong đó: Z_{oi} - Cao độ đáy sông.

Trong tính toán thực tế, điều kiện ban đầu thường chọn lưu lượng Q_0 tại chân lũ. Để xác định A_0 cho các điểm tính, có thể giả thiết dòng chảy là ổn định ($Q=\text{const}$) và áp dụng phương pháp tính lặp sau:

$$A_0^{(r+1)} = \frac{n (P_0^r)^{2/3} \cdot Q_0}{(S_0)^{1/2} \cdot (A_0^r)^{2/3}} \quad (14)$$

Với r là bước lặp. Quá trình lặp được thực hiện cho tới khi đảm bảo độ chính xác yêu cầu.



Bảng 1 - Vị trí các mặt cắt ngang sông Đà (từ đập Hòa Bình đến Trung Hà)

Thứ tự đo đạc	Thứ tự trong sơ đồ tính	Khoảng cách tính từ đập (km)	Khoảng cách giữa 2 mặt cắt Δx_i (km)
0	0	0	
1	1	0,30	0,30
2	2	0,60	0,30
3	3	1,00	0,40
4	4	1,50	0,50
6	5	2,80	1,30
9	6	4,50	1,70
11	7	5,45	0,95
14	8	7,00	1,55
21	9	14,00	7,00

31	10	27,70	13,70
39	11	38,85	11,15
45	12	45,00	8,15
47	13	55,00	10,0

2. Kết quả tính

Để kiểm nghiệm và hiệu chỉnh mô hình, đã sử dụng số liệu xả lũ thực tế ngày 19-VII-1991, trong đó lưu lượng xả lũ tại Hòa Bình là $Q_{xả} = 11433 \text{ m}^3/\text{s}$. Tương ứng mực nước tại Hòa Bình là $Z_{HB} = 23,41 \text{ m}$ và tại Trung Hà là $H_{TH} = 16,43 \text{ m}$. Hệ số nhám tại các mặt cắt được chọn để hiệu chỉnh mô hình như sau:

Mặt cắt	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Độ nhám	0,0050	0,0049	0,0047	0,0046	0,0045					0,0044			

Trong đó mặt cắt 2 tương ứng với vị trí trạm Hòa Bình (cũ) và mặt cắt 14 tương ứng với vị trí trạm Trung Hà.

Kết quả hiệu chỉnh và tính toán lưu lượng đường mặt nước sông Đà được trình bày trong bảng 2.

Bảng 2. Kết quả tính lưu lượng và đường mặt nước sông Đà

khi $Q_{xả} = 11433 \text{ m}^3/\text{s}$

Mặt cắt	Q m^3/s	Z (m)
1	11433	23,35
2	11430	22,84
3	11425	21,06
4	11420	20,92
5	11408	20,63
6	11390	20,59
7	11381	20,25
8	11366	20,37
9	11296	20,17
10	11159	18,99
11	11047	18,36
12	10986	16,60
13	10886	15,57

So sánh với mực nước thực đo tại Trung Hà, sai số mắc phải $\Delta Z = 0,17$ m, nằm trong phạm vi cho phép.

Trên cơ sở đó, đã sử dụng mô hình để tính toán cho 2 phương án sau:

- Khi lưu lượng xả tại Hòa Bình $Q_{xả} = 15000 \text{ m}^3/\text{s}$.
- Khi lưu lượng xả tại Hòa Bình $Q_{xả} = 16000 \text{ m}^3/\text{s}$.

Kết quả tính toán được trình bày trong bảng 3.

Bảng 3. Kết quả tính cho hai lưu lượng xả

Mặt cắt	$Q_{xả} = 15000 \text{ m}^3/\text{s}$		$Q_{xả} = 16000 \text{ m}^3/\text{s}$	
	Q (m^3/s)	Z (m)	Q (m^3/s)	Z (m)
.1	15000	25,63	16000	25,95
2	14995	25,40	15994	25,68
3	14994	24,03	15988	24,62
4	14978	23,82	15979	24,31
5	14961	23,53	15957	23,86
6	14937	23,15	15928	23,61
7	14922	23,14	15912	23,56
8	14899	22,82	15886	23,23
9	14794	22,79	15767	23,20
10	14589	21,11	15534	21,50
11	14421	20,33	15344	20,71
12	14329	19,50	15240	19,80
13	-14179	19,39	15070	19,78

Như vậy, với lưu lượng xả của công trình Hòa Bình $Q_{xả} = 15000 \text{ m}^3/\text{s}$, mực nước tại khu vực gần thị xã đã vượt mức 25,00m; khi $Q_{xả} = 16000 \text{ m}^3/\text{s}$, mực nước xấp xỉ ở mức 26,00m. Điều đó nghĩa là, khi lưu lượng xả $Q_{xả} >$ trên $15000 \text{ m}^3/\text{s}$, thị xã Hòa Bình có khả năng bị ngập sâu nếu không có biện pháp nâng cao cao trình mặt đê.

Tài liệu tham khảo

1. A. O. Akan and B. C. Yen: Diffusion wave flood routing in the channel networks, J. Hydraulic. Div. ASCE, 107 (HY6), 1981.
2. G. E. Blandford and L. E. Ormbee: A diffusion wave finite element model for channel networks, Journal of Hydrology, 142, 1993.
3. R. Symkiewicz: Finite element method for solution of the Saint - Venant equations in an open channel network, Journal of Hydrology, 122, 1991.
4. Ngô Trọng Thuận, Nguyễn Kiên Dũng: Nghiên cứu tình hình xói lở vùng hạ lưu đập thuỷ điện trong phạm vi Hòa Bình. Báo cáo tổng kết đê tài nghiên cứu. Sở khoa học, công nghệ và môi trường tỉnh Hòa Bình, 1996.