PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI FUARIÊ NHANH

Nguyễn Thuyết
Phòng KHKT

PHƯƠNG pháp phân tích phổ ngày càng được mở rộng phạm vi ứng dụng trong lãnh vực phát hiện các chuẩn chu kỳ của các quá trình vật lý, đặc biệt trong các ngành địa vật lý.

Tuy nhiên việc tính các ước lượng phổ là một công việc nặng nề vì khối lượng phép tính quá lớn; đặc biệt khi muốn nghiên cứu chi tiết cấu trúc sóng của quá trình, phải sử dụng các chuỗi số liệu dài. Thời gian tính tăng theo bình phương của tỷ số tăng độ dài chuỗi số liệu.

Do đó đồng thời với việc mở rộng phạm vi ứng dụng phương pháp phân tích phổ, đã tăng cường việc nghiên cứu tìm những phương pháp tính biến đổi Fuarie của các chuỗi thời gian (và/hoặc không gian), chỉ nhằm mục tiêu duy nhất là giảm bớt thời gian tính. Phương pháp biến đổi Fuariê nhanh (ký hiệu là FFT - Fast Fourier Transform) ra đời trong bối cảnh đó. Những người nêu lên đầu tiên tư tưởng này là Cooley Runge Koenig vào năm 1924. Sau đó vào đầu những năm 1960, người ta trở lại vấn đề và nó được Cooley - Tukey hoàn thiện một bước vào năm 1965, nên thường còn gọi FFT là thuật toán Cooley - Tukey. Tiếp sau đó, nhiều tác giả để tâm nghiên cứu và hoàn chỉnh hơn, trong đó có nhiều tác giả quen thuộc trong lĩnh vực phân tích phổ như Glatxman, Bendat và Piêcxon v.v. . Chương trình tính FFT cũng đã được xây dựng bởi Robinson (1967), Glatxman (1970) và nhiều tác giả khác.

Như vậy, khác với MEM (Maximum Entropy Method), FFT chỉ là một tiến bộ về khía cạnh thuật toán, nó không làm thay đổi tính chất của phổ so với các phương pháp trực tiếp hay gián tiếp tính ước lượng phổ, vì nó dựa trên cùng một nguyên lý cơ bản. Đó là những ước lượng tuyến tính của phổ, trong khi MEM cho những ước lượng tự hồi quy của phổ là những ước lượng phổ vừa cho thông tin chính xác hơn về cấu trúc tần số, vừa cho độ phân giải cao hơn.

Trong thực hành, FFT thường được kết hợp sử dụng trong MEM khi tính biến đổi Fuariê của chuỗi các hệ số AR (Autoregression - tự hồi quy) tức là chuỗi các sai số tiên đoán.

I - Bản chất đại số của FFT

Xét một vành giao hoán có đơn vị R (ký hiệu là (R, +, ., 0,1)), một số $\omega \in R$ (ω thuộc vành R) gọi là căn bậc n chính của đơn vị, nếu nó thỏa mãn các điều kiện:

1. $\omega \neq 1$
2. $\omega^n = 1$
3. $\sum_{i=0}^{n} \omega^{ip} = 0$ với $1 \leq p \leq n$.

Với một vectơ cột n chiều : $\vec{a} = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}]^T$ (T là ký hiệu chuyển vị) mà $a_i \in R$, và một ma trận A mà $A[i, j] = \omega^{ij}$ với $0 \leqslant i,j \leqslant n-1$, thì một phép biến đổi : $F(\vec{a}) = A.\vec{a}$ được gọi là một phép biến đổi Fuariê thuận của $\vec{a}$, $F(\vec{a})$ cũng là một vectơ n thành phần.

Phép biến đổi $F^{-1}(\vec{a}) = A^{-1}.\vec{a}$ được gọi là phép biến đổi Fuariê ngược.

Với những định nghĩa như trên, ta có ma trận A :

$$A = \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \ldots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & \omega^2 & \omega^3 & \ldots & \omega^{n-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & \omega^4 & & \ldots\ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \omega^0 & \omega^3 & \omega^6 & & \ldots\ldots & \omega^{3(n-1)} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{n-1} & \omega^{2(n-1)} & & \ldots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

và

$$F(\vec{a}) = \begin{bmatrix} \omega^0 & \omega^0 & \omega^0 & \ldots & \omega^0 \\ \omega^0 & \omega^1 & & \ldots\ldots & \omega^{n-1} \\ \omega^0 & \omega^2 & & \ldots\ldots & \omega^{2(n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \omega^0 & \omega^{n-1} & & \ldots\ldots & \omega^{(n-1)^2} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \\ \vdots \\ a_{n-1} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

Từ đó $F_i(\vec{a}) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j\, \omega^{ij}$ (3); $F_i(\vec{a})$ thành phần thứ i của $F(\vec{a})$ hay thành phần phổ ứng với sóng thứ i của chuỗi thời gian. Như vậy việc tính biến đổi Fuariê của một quá trình (được thể hiện bằng vectơ n thành phần $\vec{a}$) tươngđương với việc tính đa thức :

$$p(x) = \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^j \text{ tại các điểm } x = \omega^0, \ldots, \omega^{n-1}$$

Giả sử :

$$p(x) = (x - a).\, q(x) + r(x) \qquad (4)$$

Trong đó r(x) là số dư trong phép chia $p(x)/_{(x-a)}$ và ở điểm x = a thì

$$p(x) = r(x) \qquad (5)$$

Rõ ràng việc tính r(x) đơn giản hơn việc tính p(x). Như vậy, FFT là tínhcác thành phần thứ i của $F(\vec{a})$ thông qua việc tính số dư của phép chia $F_i(\vec{a})/(x^{2k} \pm \omega^s)$ Số dư này được tính theo công thức :

$$\tau(x) = \sum_{i=0}^{2^{k-1}-1} (a_i + \omega^s a_{i+2^{k-1}}) \qquad (6)$$

trong đó $2^k = n$ = độ dài chuỗi số liệu (như vậy $2^k - 1 = n-1$); $s = rev(i)$ gọi là nghịch đảo nhân của i trong hệ nhị phân. Nếu ta gọi một biểu diễn nhị phân của số nguyên i là $[d_0\ d_1\ \dots\ d_{k-1}]$, mà d_i chỉ nhận các giá trị o hoặc 1, thì :

$$i = \sum_{j=0}^{k-1} d_{k-1-j} \cdot 2^j \qquad (7)$$

còn $rev(i)$ sẽ là số nguyên có biểu diễn nhị phân là $[d_{k-1} \dots d_1\ d_0]$ và

$$rev(i) = \sum_{j=0}^{k-1} d_j \cdot 2^j \qquad (8)$$

Một chương trình tính FFT trong bộ chương trình tính ước lượng phổ của Chương trình nghiên cứu khoa học :"Gió Mùa" đã được viết bằng ngôn ngữ FORTRAN.

II - Một thuật toán tính FFT

Dưới đây chúng tôi giới thiệu thêm một thuật toán tính FFT của Cochran và các cộng sự (1967), được trình bày trong cuốn "Spectral analysis in Geophysics" của Markus Båth.

Giả sử có một chuỗi quan trắc rời rạc x_t với $t = 1, 2, \dots N$, trong đó N là một số chẵn. Chia chuỗi x_t thành hai chuỗi thành phần :

$y_t = x_{2t-1} = x_1, x_3, \dots, x_{N-1}$, gồm các phần tử có thứ tự lẻ của chuỗi x_t;

và $z_t = x_{2t} = x_2, x_4, \dots, x_N$, gồm các phần tử có thứ tự chẵn của chuỗi x_t.

Với $t = 1, 2, \dots N/2$.

Hai chuỗi thành phần y_t và z_t gọi là xen kẽ nhau.

Gọi $X_n^{(N)}$, $Y_n^{(N/2)}$, $Z_n^{(N/2)}$ là những thành phần thứ n của biến đổi Fuariê của lần lượt các chuỗi x_t, y_t, z_t; thì ta có :

$$X_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} x_t \exp(-i2\pi nt/N)$$

$$Y^{(N/2)} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N/2} y \exp(-i4\pi nt/N) \qquad (9)$$

$$Z_n^{(N/2)} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N/2} z_t \exp(-i4\pi nt/N)$$

Lưu ý rằng trong biểu thức của $X_n^{(N)}$ có N số hạng, còn trong $Y_n^{(N/2)}$ và $Z_n^{(N/2)}$ chỉ có N/2 số hạng. Ta có thể tính $X_n^{(N)}$ như sau

$$X_n^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} \left[y_t \exp.(-i2\pi n(2t-1)/N) + z_t \exp(-i2\pi n\, 2t/N) \right]$$

$$= \exp(i2\pi n/N) \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} y_t \exp(-i4\pi nt/N) + \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N/2} z_t \exp(-i4\pi nt/N)$$

hay cuối cùng

$$X_n^{(N)} = \frac{1}{2} \exp(i2\pi n/N)\, Y_n^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_n^{(N/2)} \qquad (10)$$

với $n = 0, 1, 2, \ldots, (\frac{N}{2} - 1)$

Ta xét các thành phần của nửa chuỗi sau $(n + \frac{N}{2})$ mà :

$$(n + \frac{N}{2}) = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} + 1, \ldots, N - 1.$$

Thay n bằng $n + \frac{N}{2}$, ta có :

$$Y_{n+\frac{N}{2}}^{(N/2)} = \frac{2}{N} \sum_{t=1}^{N/2} y_t \exp\left[-i\, 4\pi (n + \frac{N}{2})\, t/N\right]$$

$$= Y_n^{(N/2)} \cdot \exp(-2\pi) = Y_n^{(N/2)} \qquad (11)$$

Tương tự như vậy :

$$Z_{n+\frac{N}{2}}^{(N/2)} = Z_n^{(N/2)}$$

Còn từ phương trình (10) suy ra :

$$X_{n+\frac{N}{2}}^{(N)} = \frac{1}{2} \exp\left[i(2\pi/N)(n + \frac{N}{2})\right] Y_{n+\frac{N}{2}}^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_{n+\frac{N}{2}}^{(N/2)}$$

hay cuối cùng

$$X_{n+\frac{N}{2}}^{(N)} = -\frac{1}{2} \exp(i2\pi n/N)\, Y_n^{(N/2)} + \frac{1}{2} Z_n^{(N/2)} \qquad (12)$$

Các công thức (10) và (12) được dùng để tính biến đổi Fuariê của chuỗi x_t thông qua việc tính biến đổi Fuariê của 2 chuỗi thành phần y_t va z_t có độ dài bằng nửa độ dài x_t, như vậy thời gian tính sẽ giảm được một nửa.

Nếu $N = 2^k$ là một lũy thừa đúng của 2 thì kỹ thuật trên được thực hiện tiếp tục cho đến khi các chuỗi thành phần y và z_t chỉ còn 1 phần tử.

∴

Qua các thuật toán tính FFT trình bày trên, ta thấy ưu điểm nổi bật và duy nhất của FFT là giảm rất nhiều thời gian tính, vì nó chỉ phải thực hiện một khối lượng bằng 2kN phép tính số học, trong khi cách tính cũ phải thực hiện tới N^2 phép tính số học ($k = \log_2 N$). Với N = 1024, tức là k = 10, thời gian tính đã giảm được hơn 50 lần./.

VÀI NÉT VỀ TÌNH HÌNH HOẠT ĐỘNG CỦA MẠNG LƯỚI QUAN TRẮC KHÍ TƯỢNG BỀ MẶT

(tiếp theo trang 9)

Tiếp theo bảng 2

Tên đài trạm	Chất lượng %	Tên đài trạm	Chất lượng %
TÂY NINH		Phủ quí	97,8
Tây ninh	94,7	TIỀN GIANG	
THANH HÓA		Mỹ tho	84,7
Bái thượng	96,0	TRƯỜNG KHÍ TƯỢNG	
Hồi xuân	98,6	Sơn tây	87,3
Như xuân	95,1	TRƯỜNG SA	
Thanh hóa	97,7	Trường sa	98,4
Tĩnh gia	93,1	2C-1006PK	
Yên định	95,8	VĨNH PHÚ	
THÁI BÌNH		Minh đài	95,9
Thái bình	95,4	Phú hộ	97,3
THUẬN HẢI		Tam đảo	96,8
Hàm tân	94,9	Thanh sơn	giải thể
Nha hố	96,9	Vĩnh yên	96,3
Phan thiết	96,4	Việt trì	98,7