BÀN VỀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC BÀI TOÁN NGƯỢC TRONG THỦY VĂN

Lương Tuấn Anh
Viện KTTV

TRONG các bài toán thực tế tính toán, dự báo các đặc điểm thủy văn thường xuất hiện các thông số thể hiện một hiện tượng hay một đặc trưng vật lý nào đó và việc xác định trực tiếp bằng đo đạc không thể thực hiện được. Các thông số này có thể xác định gián tiếp bằng cách giải bài toán ngược, nghĩa là tìm chúng theo số liệu vào và số liệu ra. Những bài toán như vậy trong thủy văn có thể kể đến bài toán tìm các hệ số của tương quan nhiều biến, tìm đường đơn vị trong mô hình dự báo tuyến tính, tìm các đặc trưng thủy lực và hình học lòng sông trong phương trình Sên-venan ...

Các bài toán ngược kể trên có thể biểu diễn dưới dạng phương trình toán tử:

$$Ax = y \qquad (1)$$

đối với ẩn x. Trong đó x và y là các nguyên tố của không gian metric X và Y tương ứng; A - toán tử tác động từ X vào Y, nghĩa là xắp đặt mỗi nguyên tố từ X tương ứng với mỗi nguyên tố từ Y. Phương trình (1) thể hiện một qui luật vật lý, nó chỉ ra mối liên hệ nhất định giữa các đặc trưng của một quá trình hay một hiện tượng nào đó với các đặc trưng đã biết.

Trong thủy văn khi giải bài toán dạng (1) cần chú ý mấy điểm sau :

- Bài toán (1) có ý nghĩa khi x tìm được duy nhất và ổn định - Các số liệu sử dụng để giải phương trình (1) có sai số do độ chính xác hạn chế của máy móc đo.

- Phương trình mô hình (1) thường không thể hiện được hoàn toàn bản chất vật lý của quá trình.

Bài toán (1) được gọi là chỉnh nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau :

1. Tồn tại nghiệm x với mọi $y \in Y$.

2. Nghiệm x duy nhất, tức là nếu tồn tại x_1 và $x_2 \in X$ sao cho $Ax_1 = Ax_2 = y$ thì $x_1 = x_2$ (tồn tại toán tử nghịch đảo A^{-1}).

3. Nghiệm x phụ thuộc liên tục vào số liệu ban đầu (toán tử A^{-1} liên tục).

Điều kiện 1 và 2 đặc trưng cho sự xác định toán học, điều kiện 3 liên hệ với qui luật vật lý của bài toán. Điều kiện này không được thỏa mãn thì chỉ cần sai số nhỏ của số liệu cũng sẽ dẫn đến sai số lớn của nghiệm, bài toán được gọi là không ổn định và khi đó các nghiệm của nó sẽ không có ý nghĩa.

Giải bài toán (1) theo phương pháp Gaus :

$$x = A^{-1}y$$

có thể cho nghiệm không ổn định. Tikhonov A.N. [4] đã chỉ ra rằng nguyên nhân của tính không ổn định như vậy là tính qui ước kém của toán tử A (tính gần đúng của bài toán với thực chất vật lý của hiện tượng). Tính qui ước kém của toán tử A làm cho định thức của nó ($\|A\|$) gần bằng không và các nguyên tố của toán tử nghịch đảo A^{-1} có thể lớn vô hạn. Khi đó tìm nghiệm x sẽ không ổn định vì có ảnh hưởng không giới hạn của sai số đo đạc δ của số liệu đến nghiệm này :

$$y^{\delta} = y + \delta$$

$$x = A^{-1}y + A^{-1}\delta$$

trong đó : y^{δ} – số liệu đo đạc; y – số liệu chính xác; δ – sai số đo đạc.

Do bài toán qui ước kém, theo số liệu đo đạc y^{δ} không thể tìm được nghiệm chính xác x, mà chỉ có thể tìm một nghiệm gần đúng x^{δ}. nào đó hội tụ đến x khi sai số $\delta \to 0$ mà thôi.

Để tìm những nghiệm như vậy Tikhonov A.N. [3] đã đưa ra khái niệm về phiếm hàm điều hòa $R(y^{\delta}, \alpha)$, trong đó α – thông số điều hòa sao cho nghiệm x^{δ} tìm được thỏa mãn điều kiện ổn định nghĩa là : với mọi $\varepsilon > 0$ và $\|y^{\delta} - y\| < \delta(\varepsilon)$ thì $\|x^{\delta} - x\| < \varepsilon$.

Một dạng đơn giản nhất của phiếm hàm điều hòa như thế là phiếm hàm thông số: [1].

$$\Phi^{\alpha}[x^{\delta}] = \|Ax^{\delta} - y^{\delta}\|^2 + \alpha\|x^{\delta}\|^2 \qquad (2)$$

Lúc đó bài toán trở thành tìm giá trị x^{δ} sao cho phiếm hàm (2) nhỏ nhất sẽ bảo đảm dãy nghiệm x^{δ} hội tụ đến x khi sai số $\delta \to 0$.

Điều kiện tối thiểu hóa phiếm hàm (2) là phương trình :

$$(A^{*}A + \alpha E)\, x^{\delta} = A^{*}y^{\delta} \qquad (3)$$

trong đó : * – dấu chuyển vị ma trận; E ma trận đơn vị; α – thông số điều hòa.

Khó khăn chủ yếu khi xây dựng thuật toán là ở chỗ chọn thông số điều hòa .

Kuchment L.S. [1] sử dụng phương pháp Ivanov và tìm α với điều kiện tối ưu $\|x(\alpha_{n+1}) - x(\alpha_n)\| \to \min$. Song phương pháp này có nhược điểm ở chỗ phép tối ưu hội tụ chậm và thậm chí tồn tại những vùng tối thiểu địa phương.

Để giải quyết vấn đề chọn α và giải (3) với độ ổn định cao G.I. Marchuc [2] sử dụng phương pháp ngoại suy Richarson. Bản chất của nó là tìm một α sao cho : 1) phương trình (3) bất biến, 2) giá trị α không ảnh hưởng lớn tới nghiệm. Sau đó xét bài toán trong điều kiện $\alpha/2$, $\alpha/3$, $\alpha/4$, ... Tổ hợp tuyến tính các nghiệm này với một trọng số ngoại suy nào đó sẽ hội tụ tới nghiệm chuẩn, ổn định. Dựa trên cơ sở tư tưởng trên, chúng ta có thuật toán sau :

- Chọn các thông số $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3 \dots > \alpha_k > 0$ thường chọn α_1 phụ thuộc vào mức độ chính xác của số liệu và $\alpha_2 = \alpha_1/2$; $\alpha_3 = \alpha_1/3; \dots \alpha_K = \alpha_1/K$

Đặt bài toán thứ nhất :

$$(A^* A + \alpha_1 E)\ x^{\alpha 1} = A^* y$$

($x^{\alpha 1}$ - ký hiệu nghiệm x tìm được với thông số điều hòa α_1) và nó sẽ được giảigần đúng (phương pháp lặp) với sai số δ_1 cho trước (δ_1 - tùy theo yêu cầu về độ chính xác của nghiệm).

- Đặt bài toán thứ hai :

$$(A^* A + \alpha_2 E)\ x^{\alpha 2} = A^* y$$

Đối với bài toán này cần phải giải gần đúng với nghiệm ban đầu $\tilde{x}_0 = x^{\alpha_1}$ và quá trình lặp sẽ được tiến hành tới khi sai số của nghiệm gần đúng bằng $\alpha_2 \delta_1 / \alpha_1$.

- Đối với bài toán thứ ba :

$$(A^* A + \alpha_3 E)\ x^{\alpha_3} = A^* y$$

Với gần đúng ban đầu :

$$\tilde{x}_0 = \frac{\alpha_3 - \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} x^{\alpha_1} + \frac{\alpha_3 - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} x^{\alpha_2}$$

và phép lặp sẽ được tiến hành tới khi sai số của nghiệm gần đúng bằng $\alpha_3 \delta_1 / \alpha_1$.

Đối với bài toán thứ i

$$(A^* A + \alpha_i E) = A^* y$$

được giải gần đúng với nghiệm ban đầu :

$$\tilde{x}_0 = \sum_{j=1}^{i-1} \beta_j x^{\alpha_j}$$

trong đó :

$$\beta_j = \prod_{\substack{l=1 \\ l \neq j}}^{i-1} \frac{\alpha_i - \alpha_l}{\alpha_j - \alpha_l}$$

và sai số lặp $\alpha_i \delta_1 / \alpha_1$

Sau khi giải bài toán K, nghiệm cuối cùng được tìm theo công thức :

$$\tilde{x} = \sum_{j=1}^{K} a_j x^{\alpha_j}$$

trong đó :

$$a_j = \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{K} \frac{-\alpha_i}{\alpha_j - \alpha_i}$$

Để tìm nghiệm của phương trình dạng (1) chúng tôi đã lập một chương trình chuẩn theo thuật toán đã trình bày bằng ngôn ngữ chương trình FORTRAN cho máy tính điện tử EC-1022.

Với mục đích thử nghiệm độ ổn định của thuật toán, chúng tôi đã sử dụng phương pháp điều hòa để tìm các thông số của mô hình dự báo tuyến tính lưu lượng nước sông Mê kông cho tuyến đo Nôngpênh theo sự phân bố trữ lượng nước lòng sông. Kết quả cho thấy các thông số tìm được nhờ thuật toán điều hòa ổn định với cả số liệu không phụ thuộc.

Tài liệu tham khảo

1. Kuchment L.S. Mô hình hóa các quá trình hình thành dòng chảy sông. Leningrat-1980.
2. Marchuc G.I., Saidurov V.V. Nâng cao độ chính xác giải các sơ đồ sai phân. Maxcơva 1979.
3. Tikhonov A.N., Asernhin V. JA. Các phương pháp giải bài toán không chỉnh. Maxcơva 1974.
4. Tikhonov A.N. Bàn về phương pháp tự động hóa quá trình xử lý số liệu. Trong quyển các vấn đề toán tính. Maxcơva - 1980.