NỘI SUY VÀ LÀM TRƠN CÁC QUAN HỆ TƯƠNG QUAN TRONG KHÍ TƯỢNG THỦY VĂN VỚI CÁC ĐIỀU KIỆN BIÊN KHÁC NHAU BẰNG HÀM SPLIN BẬC 3

KS. Lê Xuân Cầu
Trường cán bộ KTTV Hà Nội

I. Đặt vấn đề

Khi nghiên cứu các quá trình khí tượng thủy văn ta hay phải thiết lập một quan hệ tương quan y = f (x) từ các cặp giá trị thực nghiệm (x_1, y_1) trong đó i = 0,1,....,L. Trong [1] các tác giả đã dùng spline bậc 3 cơ sở để thiết lập hồi quy phi tuyến một chiều nhưng khi độ dài chuỗi số liệu nhỏ hoặc khi biến x là thời gian thì để thiết lập quan hệ y = f (x) người ta dùng các công cụ khác nhau để nội suy [3]. Khi nghiên cứu các quá trình khí tượng thủy văn thường hay gặp những bài toán yêu cầu xác định một đường nội suy hoặc làm trơn với điều kiện biên khác nhau thì các phương pháp nội suy cổ điển không thích hợp. Chẳng hạn, bài toán tìm đường nội suy khi tại hai đầu mút của nó biết tiếp tuyến (tức là biết giá trị đạo hàm bậc nhất) hoặc biết độ cong trơn của đường (tức là biết giá trị đạo hàm bậc 2). Kinh nghiệm vẽ các đường nội suy trong nghiên cứu các quá trình khí tượng thủy văn chỉ ra rằng, đa số các đường cong nội suy phải được vẽ sao cho cong trơn và biến đổi dần. Khi các giá trị thực nghiệm
y_i (i=0,1,...L) có một sai số nào đó thì việc vẽ đường cong phải qua các điểm thực nghiệm không có ý nghĩa mà khi đó ta thường hay vẽ đường cong đi gần các điểm thực nghiệm sao cho nó trơn và biến đổi dần. Điều đó thể hiện rõ khi ta vẽ đường cong Q = (H) dạng vòng dây. Từ đó chúng ta phải tìm một phương pháp để giải quyết các bài toán dạng trên. Các công trình [2] đề nghị dùng hàm spline 3 để nội suy và làm trơn các quan hệ tương quan trong khí tượng thủy văn nhưng nó chưa giải quyết được các bài toán nội suy với các điều kiện biên khác nhau và khi nội suy nó bắt buộc phải qua các điểm thực nghiệm, trong khi đó các giá trị thực nghiệm thường có sai số nào đó. Vì vậy, tác giả dùng hàm spline 3 ở dạng tổng quát khách quan và có tính đến phân tích thống kê để nội suy và làm trơn các quan hệ tương quan trong khí tượng thủy văn. Tính hữu hiệu của nó được thể hiện qua ví dụ nội suy trơn độ lệch dư của quan hệ Q = f (H) dạng vòng dây ở cuối bài này.

Dùng hàm spline 3 ta có thể giải các bài toán sau:

1. Tìm đường nội suy y = (x) trên [a, b] với một trong các điều kiện biên sau:

a. Biên tự do : y" (a) = 0, 0, y" (b) = 0,0.

b. Biết tiếp tuyến của đường nội suy: y' (a) = $\alpha 1$, y' (b)=$\alpha 2$

c. Biết độ cong của đường nội suy: y" (a) = $\alpha 3$, y" (b) = $\alpha 4$

Trong đó $\alpha 1$, $\alpha 2$, $\alpha 3$, $\alpha 4$ là các giá trị cho trước.

2. Tìm đường nội suy trơn với các điều kiện dạng trên, lúc này đường nội suy không nhất thiết phải qua các cặp (x_i, y_i) mà đi "gần" nó sao cho sai số quân phương nhỏ hơn một giá trị nào đó.

3. Nội suy các quan hệ tương quan có dạng vòng dây.

II. Nội suy bằng spline 3 với các điều kiện biên khác nhau

Trên đoạn [a, b] cho trước một lưới a = $x_0 < x_1 < \dots x_n$ = b và tại các nút lưới cho các giá trị $\{f_k\}^n{}_{k=0}$. Tìm hàm g (x) thỏa mãn các điều kiện sau:

1. g (x) liên tục tới đạo hàm cấp 2 (1)
2. Trên mỗi đoạn $[x_{k-1}, x_k]$ hàm g(x) là đa thức bậc 3.
3. Tại các nút lưới x_k có: $g(x_k) = f_k$ (2)
4. Thỏa mãn một trong các điều kiện biên sau:

a) g"(a) = g" (b) = 0,0 (3)

b) g'(a) = $\alpha 1$, g'(b) = $\alpha 2$ (4)

c) g"(a) = $\alpha 3$, g"(b) = $\alpha 4$ (5)

Như vậy, trên mỗi đoạn [x_{i-1} , x_i] (i = 1, 2, ...,n) hàm g(x) có dạng:

$$g(x) = m_{i-1}\frac{(x_i - x)^3}{6h_i} + m_i\frac{(x - x_{i-1})^3}{6.h_i} + \left(f_{i-1} - \frac{m_{i-1}h_i^2}{6}\right)\cdot\frac{x_i - x}{h_i} + \left(f_i - \frac{m_i h_i^2}{6}\right)\frac{x - x_{i-1}}{h_i} \quad (6)$$

$h_i = x_i - x_{i-1}$

$m_i = g''(x_i)$

Hàm g (x) hoàn toàn xác định nếu ta xác định được mi (i=0,1,2,...n). Từ (1) ta sẽ có (n-1) phương trình để xác định mi (i= 1, 2, ..., n-1).

$$\frac{h_i}{6}m_{i-1} + \frac{h_i + h_{i+1}}{3}m_i + \frac{h_{i+1}}{6}m_{i+1} = \frac{f_{i+1} - f_i}{h_{i+1}} - \frac{f_i - f_{i-1}}{h_i} \quad (7)$$

Còn hai phương trình nữa sẽ được suy ra từ các điều kiện biên. Nếu nội suy với điều kiện biên (3) ta có :

$$m_0 = 0,0$$
$$m_n = 0,0 \quad (8)$$

Nếu nội suy với điều kiện biên (4) ta có thêm hai phương trình:

$$\frac{2}{3}m_0 + \frac{1}{3}m_1 = \frac{2}{h_1}\left(\frac{f_1 - f_0}{h_1} - f_0'\right); \quad \frac{1}{3}m_{n-1} + \frac{2}{3}m_n = \frac{2}{h_n}\left(f_n' - \frac{f_n - f_{n-1}}{h_n}\right) \quad (9)$$

Nếu nội suy với điều kiện biên (5) ta có thêm hai phương trình:

$$m_0 = f_0'' \quad ; \quad m_n = f_n'' \quad (10)$$

Như vậy, ta dễ dàng giải hệ (n+1) phương trình với (n+1) ẩn m_i (i=0, 1, ...n). Bài toán nội suy với các điều kiện biên khác nhau đã được giải.

Còn nội suy cho các quan hệ dạng vòng dây ta phân vòng dây thành hai nhánh và mỗi nhánh được nội suy bằng một trong những cách như trên.

III. Nội suy trơn bằng spline 3

Trong trường hợp tại các nút lưới ta chỉ biết giá trị gần đúng của f_k là $\tilde{f}_k$ thì đường nội suy trơn phải là đường sao cho hàm:

$$\Phi(g) = \int_a^b \left[g''\right]^2 dx + \sum_{k=0}^{n} p_k \left[g(k_x) - \tilde{f}_k\right]^2 \quad (11)$$

p_k - số dương nào đó đạt giá trị cực tiểu

- đạt giá trị cực tiểu.

Trong [2] chỉ ra rằng p_k là tối ưu nếu nó cực tiểu sai số quân phương. Hàm spline 3 nội suy trơn đi qua các nút lưới mới (x_k, μ_k) (k =0,1,...n)

μ_k xác định khi cực tiểu hóa hàm:

$$\Phi(g) = (Am, m) + \sum_{k=0}^{n} p_k \left(\mu_k - \tilde{f}_k\right)^2 \quad (12)$$

Ở đây ta dùng các ký hiệu sau:

$$A = \left\|\begin{matrix} \frac{h_1+h_2}{3} & \frac{h_2}{6} & 0 \ldots\ldots\ldots 0 & & 0 \\ \frac{h_2}{6} & \frac{h_2+h_3}{3} & \frac{h_3}{6} & \ldots\ldots 0 & 0 \\ 0 & \frac{h_3}{6} & \frac{h_3+h_4}{3} & \ldots\ldots 0 & 0 \\ \hline 0 \quad 0 & 0 & & \frac{h_{n-1}}{6} & \frac{h_n+h_{n-1}}{3} \end{matrix}\right\| \quad (13)$$

$$m = \begin{Vmatrix} m_1 \\ m_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ m_n \end{Vmatrix} \qquad f = \begin{Vmatrix} f_1 \\ f_2 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ f_n \end{Vmatrix} \tag{14}$$

$$H = \begin{Vmatrix} \frac{1}{h_1} & \left(-\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) & \frac{1}{h_2} & \dots\dots\dots\dots 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{h_2} & \left(-\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3}\right) & \dots\dots\dots\dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots\dots & \left(-\frac{1}{h_{n-1}} - \frac{1}{h_n}\right) & \frac{1}{h_n} \end{Vmatrix} \tag{15}$$

$$\mu = \begin{Vmatrix} \mu_o \\ \mu_1 \\ . \\ . \\ . \\ . \\ \mu_n \end{Vmatrix} \qquad p = \begin{Vmatrix} P_o & 0 \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 \dots\dots\dots & 0 & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & p_{n-1} & 0 \\ 0 & \dots\dots\dots\dots & 0 & P_n \end{Vmatrix} \tag{16}$$

Cực tiểu (12) khi

$$\frac{a\Phi}{a\mu s} = 0 \qquad (s = 0,1,\dots\dots,n) \tag{17}$$

Từ (17) có phương trình để xác định m:

$$(A + H.P^{-1}.H^*).m = H.f \tag{18}$$

H^{-1} là ma trận ngược của H

H^* là ma trận chuyển vị của H

Còn μ được xác định từ phương trình:

$$\mu = f - p^{-1}.H^*.m \tag{19}$$

IV. Nội suy trơn độ lệch dư tương đối của các vòng lũ.

Độ lệch dư tương đối của các quan hệ Q = f (H) dạng vòng dây thường được xác định bằng nội suy tuyến tính, sau đó nó được dùng để tính lưu lượng nhưng kết quả nhận được thường không cao và đặc tính không trơn của nội suy tuyến tính dẫn tới việc hạn chế các ứng dụng các kết quả của nó. Vì vậy, ở đây dùng hàm spline bậc 3 để nội suy trơn độ lệch dư tương đối cho các vòng lũ tại trạm Sơn Tây - sông Hồng, 1969. Độ lệch dư tương đối q (t) biến đổi theo thời gian được xác định như sau:

$$q(t) = (Qt - Qo)/ Qo = f(t) \tag{20}$$

Qo - lưu lượng xác định theo đường trung bình cả năm.

Dùng hàm spline bậc 3 để nội suy độ lệch dư tương đối từ thời gian điểm đo số No 20 (14/V) đến thời gian điểm đo số No.60 (31/VII) . Ở đây thời gian được tính là ngày thứ bao nhiêu trong năm. Kết quả cuối cùng nhận được thể hiện trên hình 1 và hình 2, đó là đường đi gần các điểm thực nghiệm và tính cong trơn của đường nội suy thể hiện rõ nét bằng đồ thị. Những kết quả này mở ra một khả năng mới cho việc xác định các quan hệ Q = F (H) dạng vòng dây.

V. Kết luận

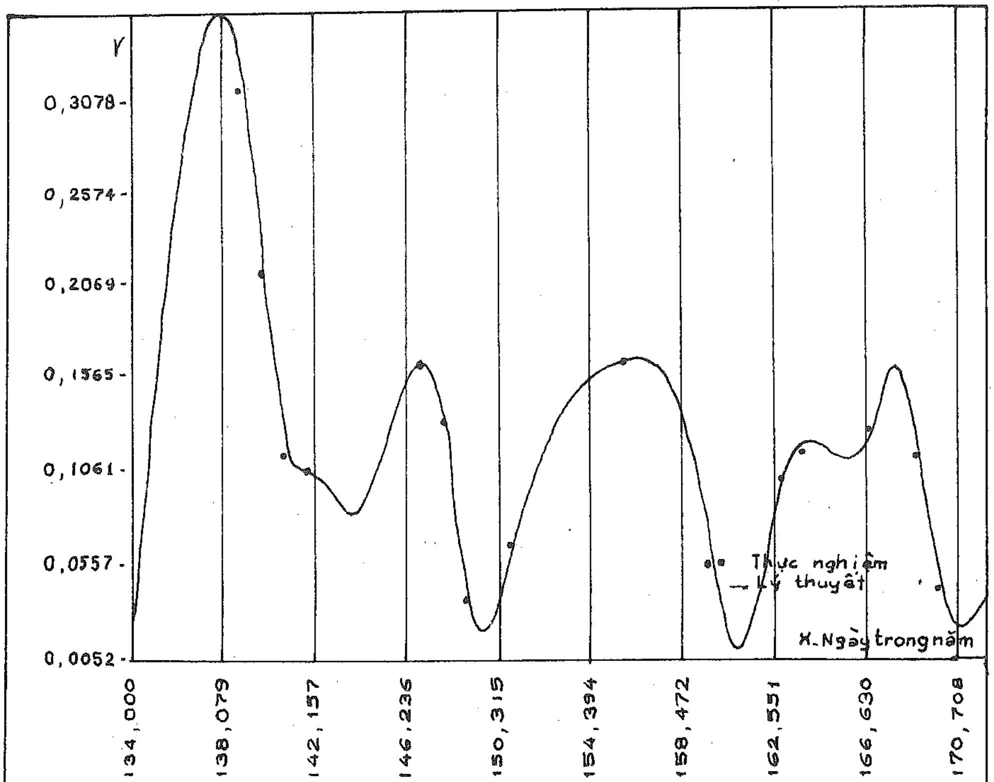
Hàm spline 3 được xác định như trên tỏ ra hữu hiệu khi giải các bài toán nội suy và làm trơn quan hệ tương quan trong khí tượng thủy văn, điều đó đã được minh họa ở ví dụ trên. Ngoài ra, nhờ nó có thể giải các phương trình toán lý hay lập một quan hệ tương quan phi tuyến một chiều y = f (x) . Dùng hàm spline 3 như trên chắc chắn sẽ giải quyết được nhiều bài toán liên quan tới nội suy và làm trơn khi nghiên cứu các quá trình khí tượng thủy văn.

Tài liệu tham khảo

1. Nguyễn Hữu Khải, Lê Xuân Cầu. Ứng dụng hàm spline để xử lý các quan hệ tương quan trong khí tượng thủy văn. Tập san Khí tượng thủy văn 10 (406)/1994.

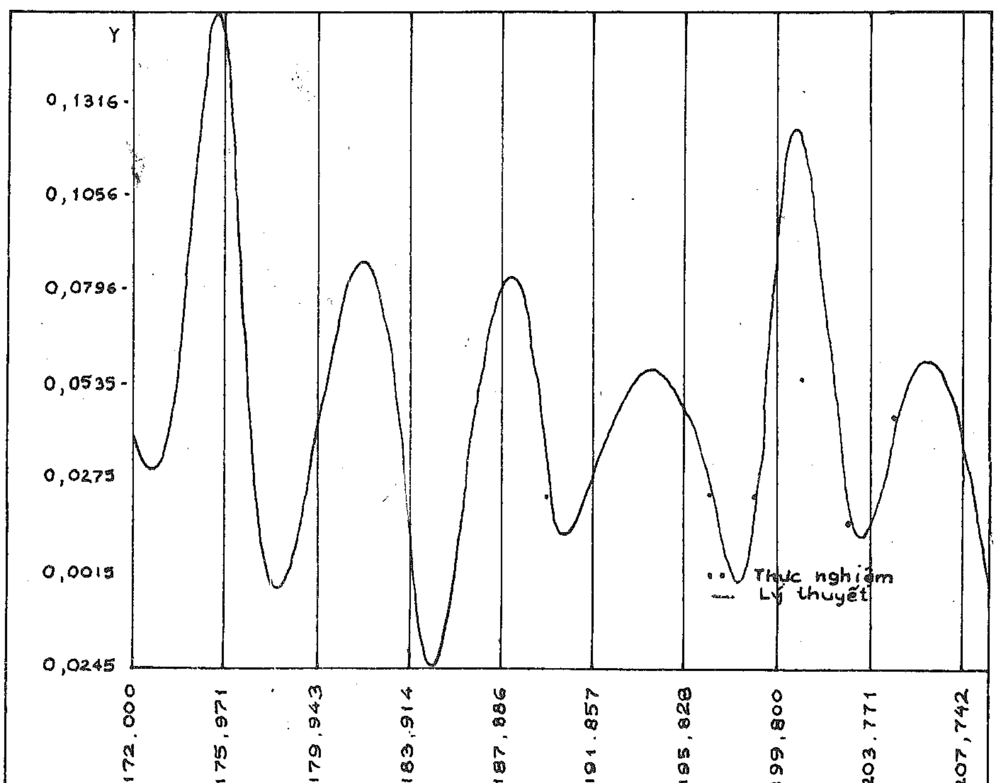
2. Constanchinov A.P, Khimin H.N. Ứng dụng spline và phương pháp độ lệch dư trong KTTV. NXB KTTV, Leningrat, 1983. (Tiếng Nga).

3. Marchuk G.I. Phương pháp tính.NXB khoa học, Matxcơva, 1980. (Tiếng Nga)



Hình 1. Đồ thị hàm nội suy trơn Y=f(X)

Y :Độ lệch tương đối
X :Thời gian



Hình 2. Đồ thị hàm nội suy trơn Y=f(X)

Y :Độ lệch tương đối
X :Ngày trong năm