ỨNG DỤNG SƠ ĐỒ PHÂN RÃ ĐỂ TÍNH DÒNG CHẢY GIÓ ỔN ĐỊNH Ở VỊNH BẮC BỘ

BÙI XUÂN THÔNG, LƯƠNG TUẤN ANH
Viện Khí tượng Thủy văn

Vấn đề mấu chốt trong mô hình dòng chảy gió ổn định vùng ven bờ của Sadin [6] là việc giải bài toán Diric-khơle với các hệ số biến đổi.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H^3}\frac{\partial \Psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H^3}\frac{\partial \Psi}{\partial y}\right) = \varphi(x,y) \qquad (1)$$

với điều kiện biên cho trước: $\Psi(G) = \Psi(S)$ (2)

Trong các biểu thức trên: G – miền biên tùy ý; H – độ sâu; $\Psi(x,y)$ – dòng toàn phần và là nghiệm cần phải tìm; $\varphi(x,y)$ ở vế phải của (1) thể hiện các ngoại lực hay còn gọi là nguồn. Hàm $\varphi(x,y)$ phụ thuộc vào sức căng gió bề mặt và các yếu tố ma sát.

Hàm $\varphi(x,y)$ được xác định như sau:

$$\frac{1}{2A_z}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_y}{H}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_x}{H}\right)\right]-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{H^3}\int_0^H M dz\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{H}\int_0^H N dz\right)\right]=\varphi(x,y) \qquad (3)$$

Trong biểu thức (3) các giá trị:

τx, τy – thành phần tiếp tuyến của sức căng gió bề mặt biển;

Az – hệ số ma sát rối theo phương thẳng đứng.

M,N – các đại lượng có quan hệ với mật độ nước biển và các thành phần tốc độ dòng chảy trong các điều kiện xác định của vùng bờ miền biển tính toán.

Sa drin [6] chỉ dừng lại ở việc thiết lập được phương trình dạng (1) mà chưa có lời giải cụ thể, tác giả chỉ đề nghị giải bằng phương pháp sai phân. Để tiện cho việc giải bài toán trên chúng tôi đặt (3) là một đại lượng $\varphi(x,y)$ như vế phải của (1).

Như trên đã nói, $\varphi(x,y)$ là một ngoại lực phụ thuộc vào gió bề mặt biển và một số yếu tố ma sát khác. Nguồn ngoại lực này được coi là một hàm không phụ thuộc vào thời gian.

Việc giải (1) đã được đề cập đến trong các công trình [1,5] song ở đây chúng tôi chỉ xin trình bày một phương pháp giải mà theo chúng tôi cho là phù hợp nhất với ý nghĩa vật lý mà mô hình này đề ra. Để giải (1) chúng tôi đã sử dụng phương pháp khôi phục. Về phương diện toán học, bản chất của phương pháp khôi phục là việc chuyển từ bài toán ổn định thành bài toán không ổn định, và khi thời gian (t) đủ lớn sẽ thu được nghiệm của bài toán ổn định. Nói một cách khác phương pháp khôi phục là biện pháp thiết lập một thuật toán gần đúng để giải (1). Trên cơ sở của phép lặp khi giải (1) bằng phương pháp trực tiếp gặp khó khăn do số lượng các điểm tính lớn. Như đã chỉ ra trong [3] khi hệ phương trình thu được là một hệ phương trình bậc cao thì khi giải bằng phương pháp trực tiếp có thể dẫn đến sự không ổn định do sai số của số liệu ban đầu. Ưu điểm của phương pháp khôi phục là nó có thể «trung hòa» các sai số đo đạc trong quá trình khôi phục. Về phương diện vật lý, nghiệm của bài toán ổn định mô tả một trạng thái cân bằng nào đó và có thể xem đó như là kết quả khôi phục dần của một quá trình phát triển theo thời gian khi có một ngoại lực không phụ thuộc vào thời gian tác động vào trường ổn định ban đầu. Ta có thể đưa (1) về dạng bài toán không dừng như sau:

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{H^3}\frac{d\Psi}{dx}\right) + \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{H^3}\frac{d\Psi}{dy}\right) - \varphi_{(xy)} \tag{4}$$

với điều kiện biên như sau: $\Psi(G) = \Psi(S)$
và điều kiện ban đầu tùy ý: $\Psi_{(x,y,o)} = \Psi_{o(x,y)}$ (5)

Từ phương trình (4) trên đây ta dễ dàng nhận thấy rằng với điều kiện biên $\Psi(G)$ không đổi, nguồn tác động $\varphi_{(x,y)}$ (không nhầm với Ψ là hàm phải xác định của mô hình) không phụ thuộc thời gian, do đó khi $t \to \infty$ thì $\frac{d\Psi}{dt} \to 0$

và lúc này nghiệm của (4) sẽ đồng nhất với nghiệm của (1). Phương trình (4) cùng với các điều kiện biên và ban đầu (5) có thể giải được nhờ sơ đồ phân rã như sau:

$$\frac{\Psi^{j+1/2}_{k,l} - \Psi^{j}_{k,l}}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\lambda}_{xx}\Psi^{j+1/2}_{k,l} + \tilde{\lambda}_{yy}\Psi^{j}_{k,l} - \varphi_{k,l}\right] \tag{6}$$

$$\frac{\Psi^{j+1}_{k,l} - \Psi^{j+1/2}_{k,l}}{\tau} = \frac{1}{2}\left[\tilde{\lambda}_{xx}\Psi^{j+1/2}_{k,l} + \tilde{\lambda}_{yy}\Psi^{j+1}_{k,l} - \varphi_{k,l}\right] \tag{7}$$

sử dụng điều kiện (5):

$$\Psi^{j+1}_{k,l} = \Psi^{j}_{k,l}\Big|_G = \Psi(S_{k,l}) \tag{8}$$

$$\Psi^{o}_{k,l} = \Psi_o(x_{k}, y_{l}) \tag{9}$$

Trong đó $\widetilde{\lambda}_{xx}$ và $\widetilde{\lambda}_{yy}$ là các toán tử sai phân được xác định theo các biểu thức sau đây:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{H^3}\frac{d\Psi}{dx}\right) \approx \widetilde{\lambda}_{xx}\,\Psi_{k,l} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{H^3_{k+1/2,l}}\,\frac{\Psi_{k+1,l}-\Psi_{k,l}}{h} - \frac{1}{H^3_{k-1/2,l}}\,\frac{\Psi_{k,l}-\Psi_{k-1,l}}{h}\right] \quad (10$$

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{H^3}\frac{d\Psi}{dy}\right) \approx \widetilde{\lambda}_{yy}\,\Psi_{k,l} = \frac{1}{h}\left[\frac{1}{H^3_{k+1/2,l}}\,\frac{\Psi_{k,l+1}-\Psi_{k,l}}{h} - \frac{1}{H^3_{k,l-1/2}}\,\frac{\Psi_{k,l}-\Psi_{k,l-1}}{h}\right] \quad (11$$

Trong đó có các ký hiệu:

$$H_{k,l+1/2} = H\left(x_k, y_l + \frac{h}{2}\right);$$

$$\Psi_{k,l} = \Psi(x_k, y_l);$$

$$\Psi_{k+1,l} = \Psi(x_k + h, y_l)$$

$$\tau = \Delta t$$

$$\Delta x = \Delta y = h$$

Sơ đồ phân rã (6 – 9) cho phép tách bài toán cho trước thành hai bài toán nhỏ một chiều trong một khoảng tính Δt. Nửa bước thời gian đầu $\Delta t_{j+\frac{1}{2}} = t_j + \frac{\Delta t}{2}$ bài toán được giải theo sơ đồ (6) đối với ẩn $\Psi_{k,l}^{j+\frac{1}{2}}$ với điều kiện biên (8) và điều kiện ban đầu (9) cho trước. Nửa thời gian sau $\Delta t_{j+1} = \Delta t_{j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t}{2}$ bài toán được giải theo sơ đồ (7) đối với ẩn $\Psi_{k,l}^{j+1}$ với điều kiện biên (8) và điều kiện ban đầu vừa nhận được kết quả ở nửa bước tính trước tính theo sơ đồ (6). Bước thời gian Δt tiếp theo cũng sẽ được tiến hành giải tượng tự như vậy chỉ khác một điều là điều kiện ban đầu của (6) lúc này không phải là một hàm cho trước mà nó là kết quả của bước vừa tính trước đó. Quá trình tính được thực hiện cho tới khi $t = t.n$ là một số đủ lớn sao cho $\psi^{n+1}_{k,l} - \psi^{n}_{k,l} \approx 0$ và lúc đó $\psi^{n}_{k,l}$ được coi là nghiệm của (1). Sơ đồ (6 — 9) được coi là sơ đồ có «hướng thay đổi», như trong [5] điều đó có nghĩa là ở nửa bước thời gian đầu phương trình được giải theo trục Ox và nửa bước thời gian sau được giải theo trục Oy.

Nếu bỏ qua các bước biến đổi đơn giản các sơ đồ (6 — 9) có thể đưa về dạng khử đuổi như sau:

$$A_k \psi^{j+\frac{1}{2}}_{k-1,\,l} - C_k \psi^{j+\frac{1}{2}}_{k,\,l} + B_k \psi^{j+\frac{1}{2}}_{k+1,\,l} = F^{x}_{k,l} \qquad (12)$$

$$A_l \psi^{j+1}_{k,\,l-1} - C_l \psi^{j+1}_{k,\,l} + B_l \psi^{j+1}_{k,\,l+1} = F^{y}_{k,l} \qquad (13)$$

Trong đó:

$$A_k = \frac{\tau}{2h^2 H^3_{k-1/2,\,l}} \; ; \quad B_k = \frac{\tau}{2h^2 H^3_{k+1/2,\,l}} \qquad ; (14)$$

$$C_k = \frac{\tau}{2h^2 H^3_{k-1/2,\,l}} + \frac{\tau}{2h^2 H^3_{k-1/2,\,l}} + 1 \qquad (15)$$

$$F^{x}_{k,l} = \frac{1}{2}\,\tau\varphi_{k,l} - \frac{1}{2}\,\tau\,\widetilde{\lambda}_{xx}\,\psi^{j}_{k,l} - \psi^{j}_{k,l} \qquad (16)$$

Hoàn toàn tương tự ta có: A_l, B_l, C_l và $F^{y}_{k,l}$

Hệ phương trình (12) được giải bằng phương pháp khử đuổi theo trục 0x; hệ phương trình (13) được giải bằng phương pháp khử đuổi theo 0y. Có thể nhận thấy rằng các hệ số khử đuổi A_k, B_k, C_k, A_l, B_l, C_l thỏa mãn điều kiện ổn định:

$$\left.\begin{aligned} |C_k| &\geqslant |A_k| + |B_k| \\ |C_l| &\geqslant |A_l| + |B_l| \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Trong tính toán của mình chúng tôi xác định τ theo công thức Duglas—Recforda đối với các bài toán hệ số hằng (1)

$$\left.\begin{aligned} \tau_p &= \frac{1-\sqrt{q}}{\mu_p} \\ \mu_p &= \left(\frac{1+\sqrt{q}}{1-\sqrt{q}}\right)^{p-1} a \qquad ; \; p = 1,2,\ldots,k \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\quad a \leqslant 0{,}5\pi^2 \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

Trong đó q là một số dương tùy ý nhỏ hơn 1; p số thứ tự bước tính theo τ.

Với các thuật toán trên đây chúng tôi đã giải phương trình (1). Chúng tôi đã chọn các điều kiện biên và thuật toán để áp dụng tính toán dòng chảy gió cho vịnh Bắc Bộ với số liệu của tháng VI/1978 (kết quả tính toán đã được trình bày trong tập công trình của chương trình biển cấp Tổng cục). Sau khi xác định được trường dòng toàn phần ψ theo phương trình (1) thông qua một số biểu thức đơn giản chúng tôi xác định được trường dòng chảy gió. Qua kết quả tính toán có thể kết luận như sau:

— Trường dòng chảy gió của vịnh Bắc Bộ được tính toán là phù hợp với dòng chảy thực tế xét về hướng dòng chảy và bậc đại lượng của tốc độ dòng chảy, tốc độ trung bình là 40cm/s.

— Dòng chảy tầng mặt có hướng phù hợp với hướng gió trung bình tháng, ở tầng giữa ($\frac{1}{2}H$), dòng chảy có hướng ngược với dòng chảy bề mặt, và ở tầng sát đáy, dòng chảy có hướng phần lớn là phù hợp với hướng dòng chảy tầng mặt nhưng với bậc đại lượng quá nhỏ (10^{-6}cm/s)./.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Godunov, Riabenki. Các sơ đồ sai phân. 1977. (tiếng Nga)
2. Marchuc G.L. Các phương pháp tính toán, Matxcova, 1977. (tiếng Nga)
3. Tikhonov A.N. Các phương pháp tự động hóa xử lý số liệu. trong cuốn «Các vấn đề tính toán». Matxcova, 1980. (tiếng Nga)
4. Ianhencô. Phương pháp bước lẻ giải các bài toán vật lý. 1967. (tiếng Nga)
5. Samarski A.A. Các sơ đồ sai phân. Matxcova, 1977. (tiếng Nga)
6. Sadrin I.F. Các phương pháp tính dòng chảy ven bờ. M.1970. (tiếng Nga)