ĐIỀU KIỆN BIÊN TRÊN BIÊN CỨNG TRONG BÀI TOÁN NƯỚC NÔNG TRÊN LƯỚI SAI PHÂN HỮU HẠN

TS. **Lê Trọng Đào**
Trung tâm Khí tượng Thủy văn Biển

1. Đặt vấn đề

Các mô hình số trị xấp xỉ hệ phương trình nước nông hai chiều được dùng để giải nhiều bài toán động lực trong hải văn như thuỷ triều, nước dâng, dòng chảy... trong sông và biển. Một trong những yếu tố quan trọng làm ảnh hưởng đến độ chính xác kết quả tính toán của mô hình là xấp xỷ các đường bờ cứng và điều kiện biên tại các điểm trên đó. Trong [1] vấn đề này đã được giải quyết cho mô hình số được xây dựng theo phương pháp phần tử hữu hạn (PTHH). Những ưu điểm lớn của mô hình PTHH so với mô hình sai phân hữu hạn (SPHH) là có thể giải các bài toán trên lưới tính không đều và do vậy, đường bờ có thể được xấp xỷ gần với bờ thực. Mặt khác, thuật toán xấp xỉ theo không gian của phương pháp này có tính tự động cao mà không phải xử lý tủn mủn cho từng trường hợp cụ thể như trong mô hình SPHH như sẽ được trình bày sau đây. Song, mô hình PTHH cũng có nhiều nhược điểm. Thứ nhất là đòi hỏi một lượng tính toán và bộ nhớ nhiều hơn rất nhiều so với mô hình SPHH, trong khi đó, đối với một số bài toán (như miền tính và địa hình đáy không quá phức tạp) kết quả tính của hai mô hình không hơn kém nhau đáng kể. Thứ hai, việc chuẩn bị đầu vào (lưới tính và các tham số của lưới) rất phức tạp, đòi hỏi tỷ mỉ và mất nhiều công sức. Trong công trình này chúng tôi muốn xây dựng một cách xấp xỷ điều kiện biên trên biên cứng cho mô hình SPHH nhằm tận dụng ưu việt của mô hình PTHH trong vấn đề này như đã trình bày trong [1].

Điều kiện tại biên cứng được đặt như sau:

$$V_n = 0$$

hay $$U\cos\alpha + V\sin\alpha = 0 \qquad (1)$$

Trong đó: V_n là thành phần vận tốc theo phương pháp tuyến với đường bờ; U,V là vận tốc theo các trục x,y tương ứng; α là góc tạo bởi trục x với pháp tuyến n của đường bờ. Giải (1) để tìm các nghiệm $U = U_b$, $V = V_b$ sao cho thoả mãn (1). Nghĩa là từ một phương trình phải tìm ra 2 nghiệm. Như ta biết, trong trường hợp tổng quát, bài toán sẽ không có nghiệm xác định.

Để giải (1) trong mô hình SPHH thường lấy hoặc $\alpha = 0^0$ hoặc $\alpha = 90^0$. Tức là:

Với $\alpha = 0^0$ tương ứng với $U = V_n = U_b = 0$ ($\cos\alpha = 1$, $\sin\alpha = 0$)

Với $\alpha = 90^0$ tương ứng với $V = V_n = V_b = 0$ ($\cos\alpha = 0$, $\sin\alpha = 1$)

Hai trường hợp trên cũng có nghĩa là đường bờ phải được xấp xỉ bằng các đoạn thẳng sao cho hoặc song song với trục ox ($\alpha = 0^0$) hoặc vuông góc với nó ($\alpha = 90^0$). Như vậy, một loạt trường hợp như $\alpha = \pm 45^0$; $\alpha = \pm 135^0$ v.v.. sẽ không giải quyết được. Trong công trình này chúng tôi đưa ra các thuật toán nhằm giải quyết một số trường hợp biên nói ở trên nhằm làm cho việc xấp xỷ đường bờ chính xác hơn.

2. Hệ phương trình nước nông

Hệ phương trình nước nông với các điều kiện biên của bài toán được viết trên hệ trục(XOY) như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U}{\partial t}+U\dfrac{\partial U}{\partial x}+V\dfrac{\partial U}{\partial y}+g\dfrac{\partial \zeta}{\partial x}-fV=Fx & (2.1)\\ \dfrac{\partial V}{\partial t}+U\dfrac{\partial V}{\partial x}+V\dfrac{\partial V}{\partial y}+g\dfrac{\partial \zeta}{\partial y}-fU=Fy & (2.2)\\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial (HU)}{\partial x}+\dfrac{\partial (HV)}{\partial y}=0 & (2.3)\\ V_n=0 & (2.4)\end{cases} \quad (2)$$

Trong đó U, V tương ứng là thành phần của véctơ vận tốc trung bình theo độ sâu theo các trục X, Y.

Các ký hiệu khác đã quen thuộc.

Xem xét hệ trục (noτ) sao cho nó tạo với OX một góc θ. Hệ phương trình được viết cho hệ trục (noτ) như sau: (để cho tiện sau này, ký hiệu ζ, H trong (2) được thay bằng η, Z tương ứng).

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_\tau}{\partial t}+W_\tau\dfrac{\partial W_\tau}{\partial \tau}+W_n\dfrac{\partial W_\tau}{\partial n}+g\dfrac{\partial \eta}{\partial \tau}-fW_n=F\tau & (3.1)\\ \dfrac{\partial W_n}{\partial t}+W_\tau\dfrac{\partial W_n}{\partial \tau}+W_n\dfrac{\partial W_n}{\partial n}+g\dfrac{\partial \eta}{\partial n}-fW_\tau=Fn & (3.2)\\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial t}+\dfrac{\partial (ZW_\tau)}{\partial \tau}+\dfrac{\partial (ZW_n)}{\partial n}=0 & (3.3)\end{cases} \quad (3)$$

Với điều kiện $W_n = 0$, hệ (3.1) - (3.3) sẽ được viết tại điểm biên I như sau:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W_\tau}{\partial t}+W_\tau\dfrac{\partial W_\tau}{\partial \tau}+\dfrac{\partial \eta}{\partial \tau}=F_\tau & (4.1)\\ \dfrac{\partial \eta}{\partial t}+\dfrac{\partial}{\partial \tau}(ZW_\tau)+Z\dfrac{\partial W_n}{\partial n}=0 & (4.2)\\ W_n=0 & (4.3)\end{cases} \quad (4)$$

Như vậy, chỉ cần giải hệ (4) ta sẽ tìm được nghiệm đúng ($W_{\tau,\eta}$) và thoả mãn điều kiện $W_n = 0$ tại điểm biên I.

Do góc α thay đổi khi điểm I chạy từ điểm biên này sang điểm biên khác nên không thể giải bài toán trên trục (noτ) được. Có nghĩa là không thể thiết lập hệ phương trình tương tự như (4) cho mọi điểm biên để tìm nghiệm ở các điểm đó. Bài toán phải được giải trên một hệ trục toạ độ cố định.

Chú ý rằng, hệ (3) được viết cho toàn miền. Hệ (3) và hệ (2) là tương đương, từ hệ này có thể nhận được hệ kia bằng các phép biến đổi dựa vào mối liên hệ sau đây:

$$\begin{cases} U = W_n \cos\alpha - W_\tau \sin\alpha \\ V = W_n \sin\alpha + W_\tau \cos\alpha \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} W_n = U\cos\alpha - V\sin\alpha \\ W_\tau = -U\sin\alpha + V\cos\alpha \end{cases} \qquad (5)$$

Như vậy, nếu tìm được nghiệm của hệ (3) thì suy ra được nghiệm của hệ (2) và ngược lại.

Trong [1] đã chứng minh được rằng

$U_b = -W_\tau \sin\alpha$

$V_b = W_\tau \cos\alpha$

Hay

$$U_b = -(U\cos\alpha - V\sin\alpha)\sin\alpha \qquad (6)$$
$$V_b = (U\cos\alpha - V\sin\alpha)\cos\alpha$$

chính là nghiệm của (2) thoả mãn điều kiện Vn = 0 tại các điểm biên cứng. Chú ý rằng, trong (6) U,V là nghiệm của (2) không thoả mãn điều kiện biên $V_n = 0$.

Vấn đề ở đây là không phải với sơ đồ sai phân nào cũng có thể xác định được U,V trong (6) tại các điểm biên. Ví dụ như sơ đồ sai phân ẩn sẽ rất khó, thậm chí không thể xác định được U,V tại các điểm biên. Mặt khác, thuật toán xấp xỷ các đặc trưng (như U,V, S chẳng hạn) tại các điểm biên sẽ khác với các điểm trong miền tính (dạng chung), hơn nữa giữa các điểm biên với nhau cũng có khác nhau.

Như vậy, để xây dựng mô hình tính toán cần phải thực hiện hai việc:

1. Lựa chọn một sơ đồ sai phân thích hợp,
2. Xấp xỉ các giá trị U,V tại các điểm biên.

3. Sơ đồ sai phân

Hệ phương trình (2) được xấp xỉ theo [2] như sau:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{j,k}^{m=1} - u_{j,k}^{m}}{T} + UPOS(u_{j,k}^{m} - u_{j+1,k}^{m})/h + UNEG(u_{j+1,k}^{m} - u_{j,k}^{m})/h \\ &+ VAUP(u_{j,k}^{m} - u_{j,k-1}^{m})/h + VAUN(u_{j,k+2}^{m} - u_{j,k}^{m})/h \\ &- f\bar{v}^{u,m} = -\frac{g}{h}(\zeta_{j,k}^{m} - \zeta_{j-1,k}^{m}) + \frac{1}{\rho_0 D_{u,j,k}^{m}}\tau_{x,j,k}^{s,m} \\ &- R_{x,j,k}^{m-1} u_{j,k}^{m=1} + \frac{N_h}{h^2}(u_{j+1,k}^{m-1} + u_{j-1,k}^{m-1} + u_{j,k+1}^{m-1} + u_{j,k-1}^{m-1} - 4u_{j,k}^{m-1}) \end{aligned} \qquad (7.1)$$

$$\begin{aligned} &\frac{v_{j,k}^{m=1} - v_{j,k}^{m}}{T} + UAVP(v_{j,k}^{m} - v_{j-1,k}^{m})/h + UAVN(v_{j+1,k}^{m} - v_{j,k}^{m})/h \\ &+ VPOS(v_{j,k}^{m} - v_{j,k-1}^{m})/h + VNEG(v_{j,k+1}^{m} - v_{j,k}^{m})/h \\ &+ f\bar{u}^{v,m+1} = \frac{g}{h}(\zeta_{j,k+1}^{m} - \zeta_{,,k}^{m}) + \frac{1}{\rho_0 D_{v,j,k}^{m}}\tau_{y,j,k}^{s,m} \\ &- R_{y,j,k}^{m-1} v_{j,k}^{m=1} + \frac{N_h}{h^2}(v_{j+1,k}^{m-1} + v_{j-1,k}^{m-1} + v_{j,k+1}^{m-1} + v_{j,k-1}^{m-1} - 4v_{j,k}^{m-1}) \end{aligned} \qquad (7.2)$$

$$\frac{\zeta_{j,k}^{m+1}-\zeta_{j,k}^{m}}{T}=-\frac{1}{h}(u_{j+1,k}^{m+1}D_{u,j+1,k}^{m}-u_{j,k}^{m+1}D_{u,j,k}^{m})-\frac{1}{h}(v_{j,k}^{m+1}D_{v,j,k}^{m}-v_{j,k-1}^{m+1}D_{v,j,k-1}^{m}) \quad (7.3)$$

Trong đó:

$$UPOS=(u_{j,k}^{m}+|u_{j,k}^{m}|)/2 \qquad UNEG=(u_{j,k}^{m}-|u_{j,k}^{m}|)/2$$

$$VAUP=(\overline{v}^{u,m}+|\overline{v}^{u,m}|)/2 \qquad VAUN=(\overline{v}^{u,m}-|\overline{v}^{u,m}|)/2$$

$$VPOS=(v_{j,k}^{m}+|v_{j,k}^{m}|)/2 \qquad VNEG=(v_{j,k}^{m}-|v_{j,k}^{m}|)/2$$

$$UAVP=(\overline{u}^{u,m+1}+|\overline{u}^{u,m+1}|)/2 \qquad UAVN=(\overline{u}^{u,m+1}-|\overline{u}^{u,m+1}|)/2$$

$$R_{x,j,k}^{m-1}=\sqrt{[(u_{j,k}^{m-1})^2+(\overline{v}^{u,m-1})^2]}/(\rho_0 D_{u,j,k}^{m-1})$$

$$R_{y,j,k}^{m-1}=\sqrt{[(\overline{u}^{v,m-1})^2+(v_{j,k}^{m-1})^2]}/(\rho_0 D_{v,j,k}^{m-1})$$

Rõ ràng sơ đồ sai phân ở trên là sơ đồ hiện. Tuần tự tính toán được thực hiện theo sơ đồ sau:

$$\begin{cases} U^{n+1}=f_u(U^n,V^n,\zeta^n) \\ V^{n+1}=f_v(U^{n+1},U^n,V^n,\zeta^n) \\ \zeta^{n+1}=f_\zeta(U^{n+1},U^n,V^{n+1},V^n,\zeta^n) \end{cases}$$

Theo sơ đồ đó thì một biến tại bước sau sẽ được tính qua giá trị các biến ở bước trước hoặc đã được tính trước đó. Như vậy, việc tính toán được thực hiện cho từng điểm theo một thứ tự tuỳ chọn. Sơ đồ tính toán ở trên rất thuận lợi cho việc bố trí các khối tính toán. Nói riêng các điểm biên, việc tính toán U , V và ζ nói ở trên là hoàn toàn xác định.

4. Xấp xỉ các biến tại các điểm biên

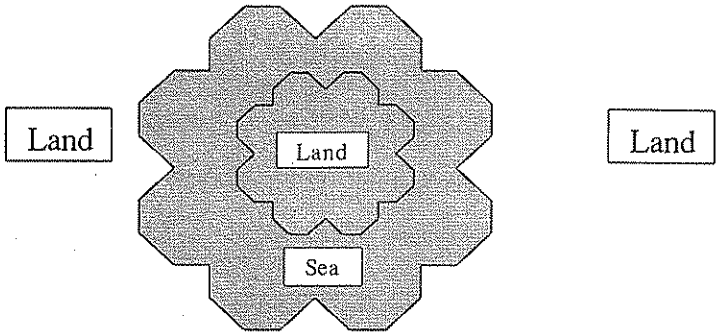
Vấn đề thứ hai cần làm là xấp xỉ U,V và ζ tại các điểm biên. Bước đầu tiên là thống kê các loại điểm biên. Hình 1 chứa tất cả các dạng điểm biên có thể có trên lưới tính đều ($\Delta x = \Delta y$). Trong khi xây dựng mô hình theo sơ đồ này chúng tôi đã xấp xỷ cho 56 dạng điểm biên. Đối với 8 dạng điểm biên theo cách xấp xỷ thông thường thì với số lượng 56 dạng như vậy cho phép xấp xỷ đường bờ gần với đường bờ thực hơn rất nhiều. Với cách xấp xỷ đường biên như vậy có thể giải các bài toán cho những vùng có địa hình phức tạp hiệu quả hơn. Tuy nhiên, so với lưới không đều trong mô hình PTHH thì đường bờ được xấp xỷ theo phương pháp này không thể mềm dẻo linh hoạt bằng.

Các mô hình được xây dựng theo sơ đồ và cách xấp xỉ biên nói ở trên gồm có :

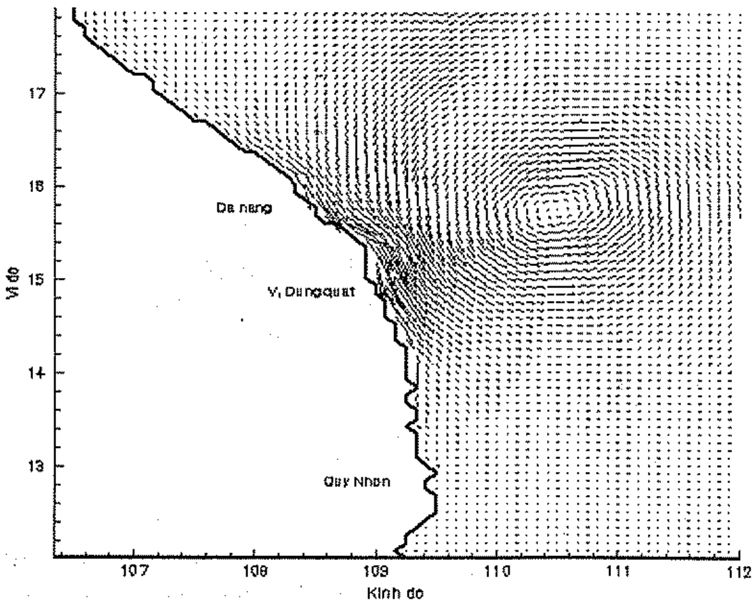
1. SURGE.FOR - dùng để tính nước dâng do bão và gió mạnh,
2. TIDE.FOR - để tính thuỷ triều, dòng triều.

Qua tính thử nghiệm thấy rằng các mô hình trên đều cho kết quả chấp nhận được. Tuy nhiên, để hoàn thiện cần tính toán, kiểm tra nhiều hơn nữa. Riêng đối với cách xấp xỷ đường bờ và điều kiện biên trên đó thì đã được kiểm tra công phu và không còn nghi vấn gì đáng kể, có thể khẳng định được tính đúng đắn của phương pháp.

Việc xấp xỉ điều kiện biên trên biên cứng cho 56 dạng được sắp xếp trong một file và được xem như một phần của mọi mô hình được xây dựng theo phương pháp trình bày ở trên.



Hình 1. Các dạng điểm biên



Hình 2. Dòng chảy trong bão

Tài liệu tham khảo

1. Lê Trọng Đào. Điều kiện biên trên biên cứng trong mô hình phần tử hữu hạn – Tập công trình "Khí tượng – thủy văn vùng biển Việt Nam". Tổng cục Khí tượng Thuỷ văn, 2000.
2. Z. Kowalik; T. S. Murty. Numerical Modeling of Ocean Dynamics – Advance Series on Ocean Engineering – Volume 5. World Scientific.