THỬ NGHIỆM ỨNG DỤNG HÀM TRỰC GIAO TỰ NHIÊN ĐỂ DỰ BÁO THÁNG

Phạm Đình An
(Viện KTTV)

Phương pháp khai triển trường yếu tố khí tượng theo các hàm trực giao tự nhiên cho phép tập trung thông tin vào một số không lớn các thành phần khai triển. Trong bài này khai triển biến trình khí áp tháng để dự báo lượng mưa và nhiệt độ trung bình tháng. Tuy đã có nhiều tài liệu nghiên cứu chi tiết về phương pháp khai triển theo các thành phần trực giao tự nhiên nhưng ở đây chỉ xin nêu lại tóm tắt như sau :

Nếu có một tập hợp m trường yếu tố khí tượng, mỗi trường được biểu thị bởi n giá trị rời rạc, thì một trường bất kỳ trong tập hợp đó $F(x,t)$ có thể khai triển theo một số hàm $X_h(x)$, được gọi là các véc tơ riêng, với các hệ số khai triển $T_h(t)$ biến đổi theo thời gian, tức là :

$$F(x,t) = \sum_h T_h(t)\, X_h(x).$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots, j, \ldots, n$$

$$t = 1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, m \qquad (1)$$

Hàm $X_h(x)$ còn gọi là hàm trực giao tự nhiên. Để xác định các hàm chưa biết $X_h(x)$ và $T_h(t)$ ta đặt điều kiện là với h cố định, biểu thức :

$$\Delta = \sum_i \sum_j \left(F_{ij} - \sum_h T_{hi} X_{hj} \right)^2 \qquad (2)$$

phải đạt cực tiểu.

Các điều kiện cực tiểu với h = 1 là

$$\frac{\partial \Delta}{\partial T_i} = -2 \sum_j F_{ij} X_j + 2\, T_i \sum_j X_j^2 = 0 \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial X_j} = -2 \sum_i F_{ij} T_i + 2\, X_j \sum_i T_i^2 = 0 \qquad (4)$$

từ (3) có

$$T_i = \frac{\sum_j F_{ij} X_j}{\sum_j X_j^2} \qquad (5)$$

Khi đó, trên cơ sở (4)

$$\sum_k X_k \sum_i F_{ik}F_{ij} = X_j \sum_i T_i^2 \sum_j X_j^2 \tag{6}$$

Ký hiệu $\frac{1}{m} \sum_i T_i^2 \sum_j X_j^2 = \lambda$ (7)

$$\frac{1}{m} \sum_i F_{ij} F_{iK} = A_{jk} \tag{8}$$

A_{jK} là mômen tương quan của trường đã cho. Ta có hệ phương trình sau đây để xác định X_j.

$$\sum_k A_{jk} X_k = \lambda X_j \qquad (j = 1,2,3,\ldots, n) \tag{9}$$

Hệ phương trìnhnày có nghiệm $\neq 0$ nếu định thức của nó $= 0$; dưới dạng ma trận :

$$|A - \lambda E| = 0 \tag{10}$$

Phương trình (10) nói chung có n nghiệm $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_m$, gọi là các trị riêng của ma trận $\{A\}$, các trị riêng này được ta xếp theo thứ tự giảm dần. Tương ứng, ta có n nghiệm của hệ (9) :

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, \ldots, x_{1n}$ (với λ_1)

$x_{21}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n}$ (với λ_2)

....

$x_{n1}, x_{n2}, x_{n3}, \ldots, x_{nn}$ (với λ_n) (11)

Mỗi nghiệm đó được gọi là vec tơ riêng của ma trận tương quan $\{A\}$. Đối với mỗi véc tơ riêng $X_h(x)$, tìm hàm thời gian tương ứng $T_h(t)$ theo quan hệ

$$T_{hi} = \frac{\sum_k F_{ik} X_{hk}}{\sum_k X^2_{hk}} \tag{12}$$

Có thể dùng X_{hj} và T_{hi} để khôi phục tập hợp các trường khí tượng theo công thức(1)
Chất lượng biểu diễn toàn bộ tập hợp được đánh giá bằng chỉ tiêu sau :

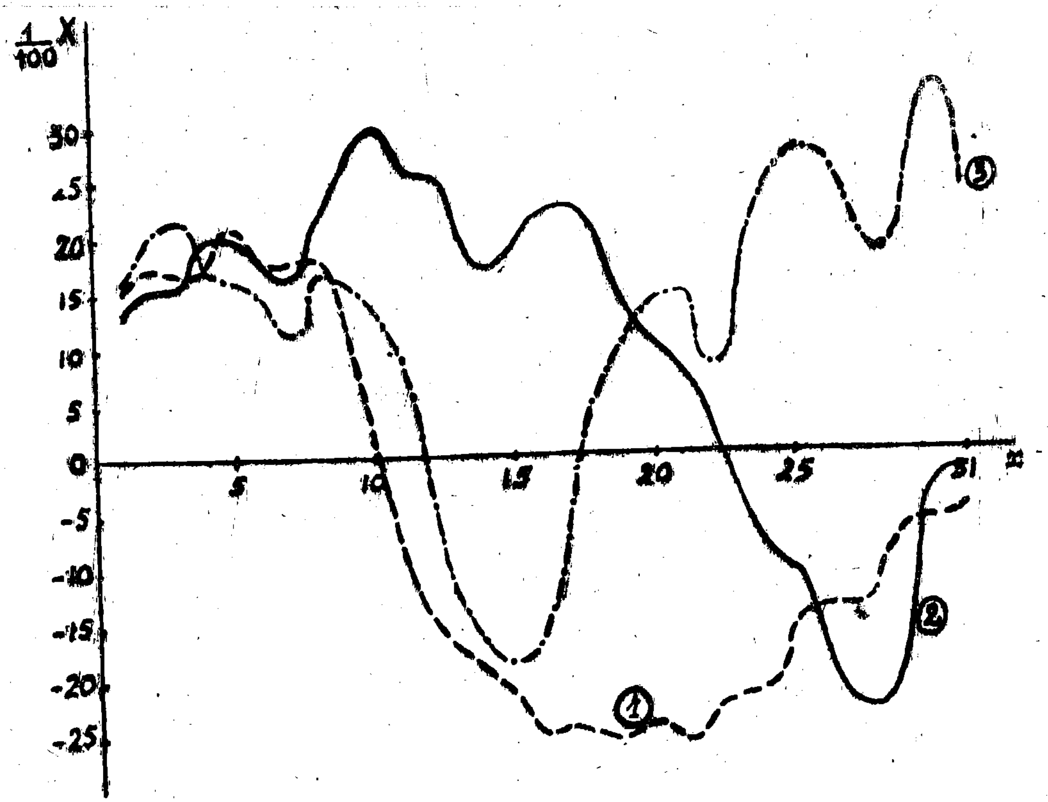
$$R^2_H = \frac{\sum_{h=1}^{H} \lambda_h}{\sum_{h=1}^{n} \lambda_h} \% \quad (H \leqslant n) \tag{13}$$

Ở đây H là số thành phần khai triển được sử dụng để khôi phục trường.

Trong bài này ta lấy số liệu khí áp hàng ngày 7g sáng tại Hà nội các tháng mùa đông XI, XII, I của các năm từ 1958 đến 1979. Việc khai triển tiến hành theo biến trình áp một tháng, tức là :

$$x = 1, 2, 3, \ldots, j, \ldots, 31$$
$$t = 1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, 66$$

Riêng tháng XI có 30 ngày nên lấy thêm khí áp ngày cuối tháng X cùng năm gộp vào. Ở đây chúng tôi định dự báo nhiệt độ (T^o) và lượng mưa (R) của tháng XII, I, II của Hà nội.



Hình 1. Véc tơ riêng

Trên hình 1 là đồ thị ba vec tơ riêng đầu tiên, ta thấy rằng với h càng lớn, $X_h(x)$ càng thể hiện những nhiễu động nhỏ hơn. Phương pháp khai triển cho phép tách ra những dao động chu kỳ khác nhau, khi số hạng hàm tự nhiên tăng lên thì chu kỳ giảm đi.

Bảng 1 cho các trị số của λ_h theo thứ tự giảm dần cũng như mức độ chính xác của việc khôi phục trường khí áp ứng với số thành phần khai triển.

Bảng 1 . Chất lượng khai triển

h	λ_h	$R_H^2 = \frac{\sum_{h=1}^{H} \lambda_h}{\sum_{h=1}^{n} \lambda_h} 100\%$	h	λ_h	$R_H^2 = \frac{\sum_{h=1}^{H} \lambda_h}{\sum_{h=1}^{n} \lambda_h} 100\%$
1	6,64	21	10	0,79	90
2	6,05	41	11	0,58	92
3	4,43	55	12	0,53	94
4	3,05	65	13	0,32	95
5	1,98	71	14	0,27	96
6	1,73	77	.	.	.
7	1,29	81	.	.	.
8	1,08	85	.	.	.
9	0,89	88	31	0,01	100

Qua bảng 1 thấy tốc độ hội tụ của chuỗi khai triển khá nhanh, chỉ cần 14 thành phần đầu đã thể hiện được 96% trường thực tế. Như vậy, những véc tơ riêng đầu và các hệ số $T_h(t)$ biến đổi theo thờigian tương ứng với chúng có tác dụng quan trọng nhất trong việc khôi phục trường được khai triển.

Tuy nhiên, khi tính hệ số tương quan giữa các hệ số $T_h(t)$ và nhân ô được dự báo (R, T^o), ta thấy một điểm khá đặc biệt. Bảng 2 cho ta các hệ số tương quan ấy. Đối với lượng mưa thì tương quan tốt nhất khi h = 23 rồi đến h = 30 và h = 8, đối với nhiệt độ thì tốt nhất khi h = 13 rồi đến h = 2 và h = 16. Như vậy không phải nhất thiết những hệ số khai triển đầu tiên, tức là những hệ số đi đôi với những vec tơ riêng đầu tiên, có tác dụng quyết định đối với thời tiết tháng sau. Có thể là những thành phần dao động chu kỳ ngắn nào đó, mang tính chất nhiễu động, lại có tác động quyết định gây nên biến động thời tiết tương lai, vì những hệ số khai triển $T_h(t)$ sau thể hiện sự biến động theo thời gian của những vec tơ riêng có chu kỳ ngày càng ngắn.

Dựa trên các hệ số tương quan, ta có thể lập các phương trình hồi qui dự báo dạng :

$$y = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (14)$$

Bảng 2

Hệ số tương quan giữa $T_h(t)$ với nhiệt độ (T^o) và lượng mưa (R) tháng sau

Hệ số tương quan / h	$T_h(t)$ với R	$T_h(t)$ với T^o	Hệ số tương quan / h	$T_h(t)$ với R	$T_h(t)$ với T^o
1	- 0,03	- 0,21	16	- 0,07	0,23
2	0,00	- 0,24	17	- 0,11	0,14
3	- 0,16	0,10	18	- 0,18	- 0,12
4	0,05	- 0,02	19	- 0,12	- 0,09
5	- 0,01	0,18	20	0,05	- 0,06
6	- 0,03	- 0,07	21	- 0,05	0,11
7	- 0,00	- 0,05	22	0,00	0,00
	0,18	0,07	23	0,23	0,03
9	- 0,07	- 0,21	24	0,06	- 0,13
10	- 0,03	0,18	25	- 0,11	0,12
11	- 0,02	- 0,04	26	- 0,15	0,02
12	- 0,08	0,20	27	0,10	0,00
13	- 0,09	0,25	28	- 0,12	0,15
14	- 0,06	0,12	29	- 0,06	0,10
15	0,14	- 0,10	30	- 0,19	0,18
			31	- 0,07	0,07

Ví dụ đối với lượng mưa và nhiệt độ ta có các phương trình hồi qui sau :

$$R_{t+1} = a_o + \sum_{h=1}^{31} a_h \; T_h \; (t) \qquad (15)$$

$$T^o_{t+1} = b_o + \sum_{h=1}^{31} b_h \; T_h \; (t) \qquad (16)$$

Các hệ số hồi qui đó nêu trong bảng 3

Đồng thời chúng tôi cũng đã lập các phương trình hồi qui dự báo R và T^o với các nhân tố dự báo là các hệ số khai triển $T_h(t)$, đầu tiên chỉ lấy hệ số khai triển cótương quan cao nhất làm nhân tố dự báo, sau đó cứ thêm dần các hệ số $T_h(t)$ có tương quan cao tiếp theo.

Ví dụ với lượng mưa ta có :

Bảng 3

Các hệ số hồi qui dự báo lượng mưa R và nhiệt độ T° tháng sau.

Yếu tố dự báo \ h	Hằng số (a_o hoặc b_o)	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R	20,13159	-0,26834	-0,03921	-1,59899	0,63003	-0,11616	-0,52518	-0,00042	3,73080	-1,49481
T	17,00584	-0,14971	-0,17681	0,08420	-0,01744	0,23526	-0,09463	-0,08303	0,12187	-0,41287

h	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
R	-0,82950	-0,58766	-2,52245	-3,28851	-2,48191	6,58160	-3,72441	-5,83501	-10,17910	-7,36397	3,15944
T	0,36111	-0,10199	0,51156	0,80773	0,43576	-0,38932	0,95640	0,64141	-0,57037	-0,44395	-0,33725

h	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
R	-3,60659	0,04348	20,55231	5,87027	-11,23203	-17,33943	12,57420	-17,23792	-9,68106	-33,02805	-13,10851
T	0,71755	0,01452	0,24937	-1,06816	1,04352	0,23345	0,04534	1,78767	1,39665	6,64673	1,15588

$$R_{t+1} = a_o' + a_1' \; T_{23}(t) \qquad (17)$$

tiếp theo là :

$$R_{t+1} = a_o'' + a_1'' \; T_{23}(t) + a_2'' \; T_{30}(t) \qquad (18)$$

cuối cùng là phương trình (15)

Song ta thấy các hệ số $T_h(t)$ cũng tính từ trường khí áp nên ở đây để tiện cho việc tính toán nghiệp vụ, ta tính các phương trình hồi qui kiểu (17),(18)... trực tiếp từ khí áp. Ký hiệu khí áp ngày là P_j ($j = 1,2,\ldots,31$), ta có các phương trình (17), (18) ... dưới dạng :

$$Y_{(t+1)} = C + \sum_{j=1}^{31} C_j \, P_j(t) \qquad (19)$$

Ở đây $Y_{(t+1)}$ là nhiệt độ hoặc lượng mưa tháng sau, C là hằng số, C_j là các hệ số hồi qui ứng với khí áp ngày thứ j của tháng hiện tại.

Ở đây vì khuôn khổ bài báo có hạn, nên không thể đưa ra toàn bộ các hệ số hồi qui đó, mà chỉ nêu ví dụ trường hợp dự báo R tháng sau bằng hệ số $T_{23}(t)$:

$$R_{(t+1)} = 25{,}9701 - 0{,}0275\ P_1(t) + 0{,}0973\ P_2(t) + \ldots + (-0{,}05066)P_{31}(t)$$

Trong bài này, chỉ nêu lên những tính toán theo lý thuyết, còn hiệu quả của phương pháp cần có thời gian thử nghiệm, song có thể rút ra những kết luận dưới đây :

1. Khi khai triển một trường yếu tố khí tượng theo các hàm trực giao tự nhiên, những véc tơ riêng đầu tiên và những hệ số khai triển biến đổi theo thời gian đi đôi với chúng có tác dụng quan trọng chủ yếu trong việc khôi phục trường chứ chưa chắc đã có tác dụng quyết định đối với việc dự báo thời tiết. Có thể những dao động nhỏ nào đó lại có tác dụng quyết định ấy.

2. Có thể áp dụng phương pháp khai triển này để dự báo cho một điểm bằng số liệu tại trạm.

Tuy nhiên còn cần cải tiến nhiều về việc lấy số liệu, chọn nhân tố dự báo.

Tài liệu tham khảo :

1. Ba-gơ-nốp N.A.Biểu diễn giải tích chuỗi các trường khí tượng bằng những thành phần trực giao tự nhiên. Công trình viện dự báo trung ương số 74,1959 (Nga)

2. Giáo sư A.L.Kats. Tiến sĩ toán lý. Mô hình dự báo số trị giáng thủy năm ngày . Tạp chí KTTV Liên xô số 10/1970 (Nga).

3. A.V.Bô-rô-đi-na.
Ứng dụng các thành phần trực giao tự nhiên để dự báo trường H_{500} 3 - 5 ngày cho đông Xi-bê-ri.
Tạp chí KTTV Liên xô số 3/1967 (Nga)

4. Phó tiến sĩ địa lý A.V.Mê-sc-skai-a. Phó tiến sĩ toán lý L.B.Đmi-tơ-ri - ê-va-A-ra-gô.
Khai triển biến trình năm của độ đóng băng các biển bắc theo các hàm trực giao tự nhiên của thời gian.
Tạp chí KTTV Liên xô số 10/1968 (Nga)

5. Phó tiến sĩ địa lý A.I.Mu-rơ-din, V.I.Smi-rơ-nốp.
Thử nghiệm dùng các hàm trực giao tự nhiên làm cơ sở biểu diễn số trị các trường đóng băng và dự báo sự phân bố lại của nó.
Tạp chí KTTV Liên xô số 11/1967 (Nga).